



RECUEIL D'EXERCICES

SUR LE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. F. FRENET,

Ancien Élève de l'École Normale, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

OUVRAGE DESTINÉ
AUX CANDIDATS À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET À L'ÉCOLE NORMALE,
AUX ÉLÈVES DE CES ÉCOLES,
ET AUX PERSONNES QUI SE PRÉPARENT À LA LICENCE
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1866

AVERTISSEMENT.

Cet Ouvrage a pour but de familiariser avec l'emploi du Calcul infinitésimal les personnes qui étudient cette branche des Mathématiques, et de leur faire nettement saisir, par des applications variées, le sens et la portée des théories générales. Il se compose de trois Parties. Dans les deux premières, dont l'une est consacrée au Calcul différentiel et l'autre au Calcul intégral, le titre des paragraphes apprend à quel genre de considérations se rapporte la solution de chaque problème. Cette indication est omise dans les Questions diverses formant la troisième Partie; on a laissé au lecteur, préparé déjà par ce qui précède, le soin d'y suppléer.

En présence des ressources multipliées qu'offraient à l'Auteur les œuvres des Maîtres, les collections savantes et les journaux scientifiques, la destination particulière du livre a déterminé le choix des matières et les limites qu'on s'est imposées. Les applications qu'il contient rentrent, en général, dans le cadre du Programme de la licence ès sciences mathématiques.

Des publications analogues, répandues en Allemagne et en Angleterre, ont fourni de précieux secours. On a surtout largement puisé dans l'excellent ouvrage

de M. D.-F. Gregory, intitulé : *Examples of the processes of the differential and integral calculus.*

Cette *nouvelle édition* se distingue principalement de la précédente par des additions nombreuses qui en ont beaucoup accru le volume. La plupart se rattachent à la première Partie. Le Calcul différentiel occupant enfin, dans les Cours de Mathématiques spéciales, la place qui lui convient, on a jugé utile d'offrir aux élèves qui les suivent une plus grande variété d'exercices et plusieurs résultats de nature à les intéresser. Il est vrai que la notation de Leibnitz, employée ici, n'a pas encore accès dans l'enseignement secondaire, mais on a pris soin d'expliquer en tête du livre les notations et définitions qui pourraient embarrasser le lecteur.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS
PRÉLIMINAIRES.

I. $\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2.3\dots(p-1)p} = \dbinom{n}{p}$. (Euler.)

II. $\sqrt{-1} = i$. (Gauss.)

III. Log x désigne le logarithme népérien de x.

IV. L'expression

$$\sum_{n=a}^{n=b} F(n),$$

dans laquelle a et b sont des nombres entiers, représente la somme des valeurs que prend $F(n)$ quand on y remplace n par chacun des termes de la suite

$$a,\quad a+1,\quad a+2,\dots,\quad b-1,\quad b.$$

La même somme s'écrit plus simplement

$$\sum_{a}^{b} F(n) \quad \text{ou} \quad \sum F(n),$$

lorsqu'il n'en peut résulter aucune ambiguïté.

V. Les coordonnées d'un point rapporté à des axes rectilignes sont ordinairement désignés par x, y, z. Les coor-

données courantes le sont quelquefois par X, Y, Z. A moins de mention expresse du contraire, on suppose les axes perpendiculaires entre eux.

r et θ représentent les coordonnées polaires d'un point dans un plan.

VI. Soient Δx et Δy les accroissements correspondants de la variable x et de la fonction $y = f(x)$; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro, limite qu'on nomme indifféremment la *dérivée* ou le *coefficient différentiel* de y, est exprimée par l'une quelconque des formes

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{(notation de Leibnitz)},$$

$$f'(x) \quad \text{(notation de Lagrange)},$$

$$D_x y \quad \text{(notation de Cauchy)}.$$

On emploie aussi les formes plus simples

$$y', \quad f'_x, \quad f', \quad Dy,$$

quand il n'en résulte aucune ambiguïté.

Le produit de la dérivée par dx est la *différentielle*.

La recherche de la différentielle ou la *différentiation* d'une fonction est donc un problème identique à la recherche de la dérivée.

La dérivée de l'ordre n peut s'écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad D^n_x y,$$

ou encore

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}_x, \quad f^{(n)}, \quad D^n y.$$

Soit

$$u = f(x, y, z);$$

si l'on prend la dérivée de u n fois par rapport à x, la dérivée du résultat p fois par rapport à y, puis celle du nouveau résultat q fois par rapport à z, la quantité à laquelle on parvient ainsi est représentée par l'une quelconque des deux expressions

$$\mathrm{D}_x^n \mathrm{D}_y^p \mathrm{D}_z^q u, \quad \frac{d^{n+p+q} u}{dx^n dy^p dz^q}.$$

VII. Soit $\varphi(x)$ la dérivée d'une fonction $f(x)$; l'expression

$$\int \varphi(x)\,dx,$$

qu'on nomme l'*intégrale* de $\varphi(x)\,dx$, désigne une fonction dont la dérivée est $\varphi(x)$; et le type le plus général d'une pareille fonction est représenté par

$$f(x) + \mathrm{C}, \quad \int \varphi(x)\,dx + \mathrm{C},$$

où l'on entend par C une quantité quelconque indépendante de x.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

QUESTIONS.

SOLUTIONS.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

QUESTIONS.

SOLUTIONS.

TROISIÈME PARTIE.

ERRATA.

Page 3, ligne 7, *après* $\alpha > 0$, *ajoutez* $x > 0$.

Page 6, ligne 11, *au lieu de* A^n, *lisez* A_n.

Page 15, ligne 16, *au lieu de* log, *lisez* $\log x$.

Page 16, ligne 15, *au lieu de* e^z, *lisez* e^x.

Page 42, lignes 21 et 22, *au lieu de* rayons de courbure correspondants de A et A_1, *lisez* rayons de courbure *oblique* correspondants (n° 317) respectivement tangents à A et à A_1.

Page 46, ligne 3, *ajoutez* : Pour *n* infini et $x < 1$ la somme est $\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Page 47, ligne 5, *au lieu de* $(\mu+1)x\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}$,

lisez $(\mu+1)x+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}$.

Page 48, ligne 16, *au lieu de* dans ce cas, *lisez* si $b-a$ est plus grand que 1.

Page 56, ligne 6, *au lieu de* $\sin \frac{a}{2n}$, *lisez* $\sin \frac{a}{2^n}$.

Page 60, ligne 14, *au lieu de* x par xz, *lisez* z par xz.

Page 63, ligne 16, *au lieu de* $(n+1)\pi^2$, *lisez* $(n+1)^2\pi^2$.

Page 64, ligne 11, *au lieu de* $(-1)^n \cos^m \frac{z}{m} > \mathrm{P}$, *lisez* $(-1)^n \sin z > \cos^m \frac{z}{m}\mathrm{P}$.

Page 100, ligne 10, *supprimez* $\sin x < 1$ ou.

Page 101, ligne 3, *ajoutez à la fin* $+ \ldots$.

Page 123, ligne 1, *au lieu de* maximum, *lisez* ni maximum ni minimum.

Page 126, ligne 15, *au lieu de* PMRO, *lisez* PMRQ.

Page 167, ligne 2, *au lieu de* $(4k+1)$, *lisez* $-(4k+1)$.

Page 189, ligne 10, *au lieu de* $\frac{z^3}{1.2.3}$, *lisez* $\frac{z^3}{1.2.3}$.

Page 191, ligne 20, *au lieu de* 173, *lisez* 174.

Page 212, ligne 19, *au lieu de* a, *lisez* a^2.

Page 224, ligne 7, *au lieu de* r, *lisez* r^2.

Page 231, ligne 2, *au lieu de* ∞, *lisez* 0.

Page 252, ligne 2, *au lieu de* $2^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $2^{-\frac{1}{2}}$.

Page 254, ligne 8, *au lieu de* $\frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}+x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}+x}$, *lisez* $\frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}+x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}-x}$.

Page 273, ligne 15, *au lieu de* $dz\,x\,dy$, *lisez* $z\,dx\,dy$.

Page 281, ligne 7, au lieu de f', *lisez* f.

Page 284, ligne 10, *au lieu de* $\mathrm{B}h$, *lisez* $\mathrm{B}=h$.

Page 284, ligne 15, *au lieu de* $(b -)$, *lisez* $(b-a)$.

Page 287, ligne 19, *au lieu de* $\frac{\pi^2}{12}$, *lisez* $-\frac{\pi^2}{12}$.

Page 294, ligne 5, *au lieu de* $\left(1-\frac{x^n}{m}\right)^n$, *lisez* $\left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m$.

Page 298, ligne 12, *au lieu de* $\frac{m}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin\theta$, *lisez* $\frac{n}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin\theta$.

Page 303, ligne 14, *au lieu de* $x_n a^n$, *lisez* $a_n x^n$.

Page 304, ligne 14, *au lieu de* $x^{\frac{1}{3}}$, *lisez* $x^{\frac{1}{5}}$.

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

QUESTIONS.

§ I. — Introduction. — *Séries, produits de facteurs en nombre infini.*

1. Trouver les sommes des séries convergentes :

$$(1)\qquad \frac{1}{1.2},\qquad \frac{1}{2.3},\ldots,\qquad \frac{1}{n(n+1)},\ldots,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{1.3},\qquad \frac{1}{2.4},\ldots,\qquad \frac{1}{n(n+2)},\ldots,$$

$$(3)\qquad \frac{1}{1(m+1)},\quad \frac{1}{2(m+2)},\ldots,\quad \frac{1}{n(m+n)},\ldots.$$

Le nombre m est supposé entier et positif.

2. Prouver la divergence de la série dont le terme général est

$$\frac{1}{a+nb}.$$

3. Démontrer la relation

$$\sum_{p=1}^{p=n} px^p = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

Cas où $n = \infty$.

4. Démontrer la relation

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = \frac{1}{3x(x+1)(x+2)}.$$

5. Démontrer la relation

$$(1+x)^{-\mu} = 1 - \mu x + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p} x^p + \ldots.$$

On suppose μ entier positif et $x < 1$.

6. Étant donnée la série convergente

$$1, \quad \frac{x}{a+h_1}, \quad \frac{x(x+h_1)}{(a+h_1)(a+h_2)}, \ldots,$$
$$\frac{x(x+h_1)(x+h_2)\ldots(x+h_n)}{(a+h_1)(a+h_2)\ldots(a+h_{n+1})}, \ldots,$$

on demande :

1° La somme de cette série, sachant qu'elle est indépendante des quantités positives non décroissantes $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$;

2° Le procédé au moyen duquel cette série a été formée. On suppose $x < a$.

7. Condition de convergence de la série

$$1, \quad \frac{a}{b}x, \quad \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2, \quad \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}x^n, \ldots.$$

Examiner le cas où $x = 1$, et trouver la somme de la série particulière obtenue.

8. Reconnaître la convergence ou la divergence des séries :

$$(1)\quad \sin^\alpha\left(\frac{x}{a}\right),\quad \sin^\alpha\left(\frac{x}{a+1}\right),\ldots,\quad \sin^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right),\ldots,$$

$$(2)\quad \mathrm{tang}^\alpha\left(\frac{x}{a}\right),\quad \mathrm{tang}^\alpha\left(\frac{x}{a+1}\right),\ldots,\quad \mathrm{tang}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right),\ldots.$$

On suppose $\alpha > 0$, $\frac{\pi}{2} > \frac{x}{a} > 0$.

9. Déterminer la convergence ou la divergence des séries :

$$(1)\quad \log \text{séc}\,\frac{x}{a},\quad \log \text{séc}\,\frac{x}{a+1},\ldots,\quad \log \text{séc}\,\frac{x}{a+n},\ldots,$$

$$(2)\quad \begin{cases} \log\left(1+\mathrm{tang}\,\frac{x}{a}\right),\quad \log\left(1+\mathrm{tang}\,\frac{x}{a+1}\right),\ldots, \\ \qquad \log\left(1+\mathrm{tang}\,\frac{x}{a+n}\right),\ldots. \end{cases}$$

On suppose $\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}$.

10. Calculer les sommes :

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sin(a+p\alpha),\qquad \sum_{p=0}^{p=n} \cos(a+p\alpha).$$

11. Soit une série à termes positifs

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{H}^{(0)},\quad \mathrm{H}^{(1)},\ldots,\quad \mathrm{H}^{(m)},\ldots,$$

dans laquelle chaque terme se développe en une série con-

vergente à termes positifs, de telle sorte qu'on ait :

$$H^{(0)} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$H^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots + u_n^{(1)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$H^{(m)} = u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \ldots + u_n^{(m)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on forme les nouvelles séries :

$$(u_0) \qquad u_0,\ u_0^{(1)},\ u_0^{(2)}, \ldots,\ u_0^{(m)}, \ldots,$$
$$(u_1) \qquad u_1,\ u_1^{(1)},\ u_1^{(2)}, \ldots,\ u_1^{(m)}, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(u_n) \qquad u_n,\ u_n^{(1)},\ u_n^{(2)}, \ldots,\ u_n^{(m)}, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

elles sont aussi convergentes, et leurs sommes respectives $V_0, V_1 \ldots, V_n, \ldots$ forment une série convergente ayant la même somme que la série (A).

Le théorème subsiste pour des séries à termes quelconques, pourvu qu'elles ne cessent pas d'être convergentes quand on y remplace chaque terme par sa valeur absolue.

(CAUCHY.)

12. Développer

$$y = \frac{1}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = (1 + x^2)^{-1}\left(1 - \frac{2x}{1 + x^2}\cos\alpha\right)^{-1}$$

en série convergente de la forme

$$1 + A_1 x + \ldots + A_{2n-1} x^{2n-1} + A_{2n} x^{2n} + \ldots.$$

On suppose $x < 1$.

13. Trouver la limite vers laquelle tend le produit $P_n = \cos a \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}$, quand n croît indéfiniment.

14. Si les fractions positives décroissantes

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \ldots$$

forment une série convergente, on peut prendre le nombre m assez grand pour que les produits

$$A_p = (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2})\ldots(1 - u_{m+p}),$$
$$B_p = (1 + u_{m+1})(1 + u_{m+2})\ldots(1 + u_{m+p}),$$

diffèrent de l'unité aussi peu qu'on voudra, quelque grand que soit p.

15. Si les fractions positives décroissantes

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \ldots$$

forment une série convergente, les produits

$$A_n = (1 - u_0)(1 - u_1)\ldots(1 - u_n),$$
$$B_n = (1 + u_0)(1 + u_1)\ldots(1 + u_n)$$

tendent vers des limites finies quand n croît indéfiniment.

16. Si les fractions positives indéfiniment décroissantes

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \ldots$$

forment une série divergente, le produit

$$A_n = (1 - u_0)(1 - u_1)\ldots(1 - u_n)$$

tend vers zéro quand n croît indéfiniment, et le produit

$$B_n = (1 + u_0)(1 + u_1)\ldots(1 + u_n)$$

croît sans limite dans le même cas.

17. Démontrer que la série

$$(1) \quad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots + (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} - \ldots$$

a pour limite zéro, quand m est positif, et croît indéfiniment quand m est négatif.

18. Transformer la série convergente

$$1,\quad u_1,\quad u_2,\ldots,\quad u_n,\ldots$$

en un produit de facteurs dont le nombre est infini.

Réciproquement, transformer en série le produit convergent

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\ldots.$$

(STERN.)

19. Déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$, qui rendent identiques les deux développements

$$P_n = (1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^nz),$$
$$S_n = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A^n z^n;$$

puis former la série convergente qui représente la limite de P_n quand on fait croître n indéfiniment.

On suppose x et z moindres que l'unité.

20. Démontrer les identités :

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{aligned} \sin mx &= m \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\text{(B)}\quad \left\{\begin{aligned} \sin mx &= m \cos^m x \operatorname{tang} x \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 x}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 x}{\operatorname{tang}^2 2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 x}{\operatorname{tang}^2 \frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right), \end{aligned}\right.$$

où m représente un nombre positif impair.

21. Des relations précédentes déduire celles-ci :

$$(-1)^n \sin z < (-1)^n z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right],$$

$$(-1)^n \sin z > (-1)^n \cos^m \frac{z}{m}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$
$$\times\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right],$$

dans lesquelles l'arc x est compris entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$, et le nombre entier n est plus petit que le nombre impair m.

On s'appuiera sur les inégalités :

$$\text{(C)} \qquad \frac{\sin(a+h)}{a+h} < \frac{\sin a}{a}, \quad \frac{\operatorname{tang}(a+h)}{a+h} > \frac{\operatorname{tang} a}{a},$$

qui supposent a et $a+h$ moindres que $\frac{\pi}{2}$, et h essentiellement positif.

22. Démontrer les deux relations :

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$
$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

(Euler.)

23. Vérifier les relations suivantes au moyen de la formule de Moivre :

$$\sin(x+nh) = \sin x + \binom{n}{1}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)$$
$$-\binom{n}{2}\cos\left(x+2\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2$$
$$-\binom{n}{3}\cos\left(x+3\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^3$$
$$+\binom{n}{4}\cos\left(x+4\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\cos(x+nh) = \cos x - \binom{n}{1}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)$$
$$-\binom{n}{2}\cos\left(x+2\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2$$
$$+\binom{n}{3}\sin\left(x+3\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^3$$
$$+\binom{n}{4}\cos\left(x+4\frac{h}{2}\right)\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^4$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On suppose n entier positif.

24. Calculer les sommes :

$$\sum_{p=0}^{p=n} x^p \cos(a+p\alpha), \quad \sum_{p=0}^{p=n} x^p \sin(a+p\alpha),$$

et en déterminer les limites quand on suppose que n croit indéfiniment.

§ II. — *Différentiation des fonctions explicites d'une seule variable.*

25. $y = (1+2x-4x^2)(1-2x+4x^2-4x^3)$.

26. $y = \dfrac{1+3x-3x^2}{3x^3-9x^2+9x-3}$.

27. $y = \dfrac{x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

28. $y = (9a^2-6abx+5b^2x^2)(a+bx)^{\frac{2}{3}}$.

29. $y = (5b^3x^3+30ab^2x^2+40a^2bx+16a^3)(a+bx)^{-\frac{5}{2}}$.

30. $y = (x-2)^9(x-1)^{-\frac{5}{2}}(x-3)^{-\frac{11}{2}}$.

31. $y = \dfrac{[(x+1)(x+3)^9]^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^4}$.

32. $y = \log\left[\frac{b}{2} + x + (a + bx + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$.

33. $y = \log \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

34. $y = \log(\log x) = \log_2(x)$.

35. $y = \log_n(x)$.

36. $y = \dfrac{x^3 - \frac{96}{25}x + \frac{288}{125}}{(4-5x)^2} + \frac{12}{125}\log(4-5x)$.

37. $y = \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{125}{12} + \frac{65}{3}x + \frac{35}{2}x^2 + 5x^3}{(1+x)^4} + 5\log\frac{x}{1+x}$.

38. $y = e^{\operatorname{arc\,sin} x}$.

39. $y = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

40. $y = \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc\,cos} \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$.

41. $y = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

42. $y = \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^5 x - \frac{13}{15}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{1}{2}\cot x \operatorname{coséc} x$
$- \frac{7}{2}\log\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$.

43. $y = \operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]$.

44. $y = x^{\sin x}$.

45. $y = \log\left[x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \operatorname{arc\,séc}\frac{x}{a}$.

46. $y = \frac{4x\sin x - \cos x}{20\cos^5 x} + \frac{4x\sin x - 2\cos x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15}$
$\times(x \operatorname{tang} x + \log\cos x)$.

47. $y = \log\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$

48. $y = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \operatorname{arc\,tang} \frac{2p \sin x}{m + n + (m - n)\cos x}$

$$+ \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \operatorname{arc\,tang} \frac{2q \sin x}{m - n + (m + n)\cos x}.$$

On suppose les relations suivantes :

$$m^2 = a + b + c, \quad n^2 = a - b + c,$$

$$p^2 = \frac{1}{4}(m - n)^2 - 2c, \quad q^2 = \frac{1}{4}(m + n)^2 - 2c.$$

49. Les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant définies par les équations suivantes :

$$x_1 = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{x}}, \quad x_2 = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_1}}, \ldots, \quad x_n \sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_{n-1}}},$$

trouver la dérivée de la fonction vers laquelle tend x_n quand n augmente indéfiniment.

50. Étant donnée la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin x + \sin(x + h) + \sin(x + 2h) + \ldots + \sin(x + nh) \\ &\qquad = \frac{\sin\left(x + \frac{nh}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}, \end{aligned} \right.$$

en déduire l'expression de la somme

$$(2) \quad \cos x + \cos(x + h) + \cos(x + 2h) + \ldots + \cos(x + nh).$$

(N° 10.)

51. Démontrer les relations

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$$
$$= \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

52. Étant donnée la relation

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+2\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)=\frac{\sin nx}{2^{n-1}},$$

en déduire

$$\operatorname{coséc}^2 x+\operatorname{coséc}^2\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{coséc}^2\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)=n^2\operatorname{coséc}^2 nx.$$

§ III. — *Différentiation des fonctions explicites de plusieurs variables.*

53. $u=27x^3-18x^2y+12xy^2-8y^3.$

54. $u=\arcsin\dfrac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

55. $u=\log\dfrac{x+(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x-(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

56. $u=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{2x+y-x^2y}{1-2xy-x^2}.$

57. $u=\arccos\dfrac{1-xy}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

58. $u=\log\operatorname{tang}\dfrac{x}{y}.$

59. $u=\dfrac{ay-bz}{cz-ax}.$

60. $u=\dfrac{c^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

61. $\left\{\begin{array}{l} u=\sin x\cos y\sin z+\cos x\sin y\sin z \\ \qquad +\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z. \end{array}\right.$

62. $u=z^{y^x}.$

63. Appliquer le théorème des fonctions homogènes à

la fonction

$$u=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(y+z-x)^3.$$

64. Soit

$$u=f(x,\,y,\,z,\,t)$$

une fonction homogène des quantités x, y, z, t, et $U=F(X, Y, Z, T)$ ce que devient cette fonction quand on y remplace x, y, z, t par des expressions linéaires en X, Y, Z, T. Démontrer qu'on a

$$x_1\frac{df}{dx}+y_1\frac{df}{dy}+z_1\frac{df}{dz}+t_1\frac{df}{dt}=X_1\frac{dF}{dX}+Y_1\frac{dF}{dY}+Z_1\frac{dF}{dZ}+T_1\frac{dF}{dT},$$

x_1, y_1, z_1, t_1 étant les valeurs de x, y, z, t correspondantes aux valeurs X_1, Y_1, Z_1, T_1 des variables X, Y, Z, T.

65. Étant donnée la fonction

$$u=x^nf\left(\frac{y}{x},\,\frac{z}{x}\right),$$

démontrer la relation

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+y^2\frac{d^2u}{dy^2}+z^2\frac{d^2u}{dz^2}+2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+2yz\frac{d^2u}{dy\,dz}$$
$$+2zx\frac{d^2u}{dz\,dx}=n(n-1)u.$$

66. Étant donnée la fonction

$$u=e^{xyz},$$

trouver $\dfrac{d^3u}{dx\,dy\,dz}$.

67. Étant donnée la fonction

$$u=\text{arc tang}\,\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

trouver $\dfrac{d^2u}{dx\,dy}$ et $\dfrac{d^4u}{dx^2\,dy^2}$.

68. Étant donnée la fonction

$$(1)\quad \begin{cases} u = x(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-z)^{\frac{1}{2}} + y(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad + (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} - xyz, \end{cases}$$

démontrer qu'on a

$$(2)\quad \begin{cases} (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dx} = (a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dy} = (a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dz} \\ \qquad = -(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d^3u}{dx\,dy\,dz}. \end{cases}$$

69. Des équations

$$(1)\qquad t = f(x, y), \quad u = \mathrm{F}(x, y),$$

où x et y sont des variables indépendantes, on déduit

$$(2)\qquad x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t);$$

démontrer qu'on a

$$(f'_x \mathrm{F}_y - f'_y \mathrm{F}'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1.$$

§ IV. — *Différentiation des fonctions implicites.*

70. $ax + by + xy = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

71. $y^n = \dfrac{x+y}{x-y}$.

72. $1 + xy = \log(e^{xy} + e^{-xy})$.

73. $\dfrac{y \log x}{x \log y} = \dfrac{x \log y}{y \log x}$.

74. $y = 1 + xe^y$.

75. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

76. $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

77. $y \sin nx - ae^{nx+y} = 0.$

78. $e^{x^y} + [\text{séc}(xy)]^{\frac{1}{2}} = 0.$

79. $\arcsin\left(\dfrac{y^3 + x^3 - 3x^2y}{y^3 + x^3 - 3xy^2}\right)^{\frac{1}{3}} = a.$

80. $y^3 - 3y \arcsin x + x^3 = 0.$

81. $y \text{ arc tang} x - y^2 + x^2 = 0.$

82. $x = a \arccos \dfrac{a - y}{a} - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$

Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

83. Étant données les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 3z + a = 0, \\ z^2 - 2y^2 - x + b = 0, \end{cases}$$

trouver $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dx}$.

84. Étant données les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 0, \\ x + y + z = a, \end{cases}$$

trouver $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dx}$.

85. Étant données les équations

$$\begin{cases} u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ \log(xy) + \dfrac{y}{x} = b^2, \\ \log\left(\dfrac{z}{x}\right) + zx = c^2, \end{cases}$$

trouver $\dfrac{du}{dx}$.

86. z étant une fonction des deux variables indépendantes x et y, définie par l'équation

$$z = x + yf(z), \tag{1}$$

démontrer la relation

$$D_y[\varphi(z) D_x z] = D_x[\varphi(z) f(z) D_x z]. \tag{2}$$

87. La fonction z étant la même qu'au numéro précédent, on a

$$D_y^n z = D_x^{n-1}[(fz)^n D_x z],$$

et, plus généralement,

$$D_y^n F(z) = D_x^{n-1}[F'(z)(fz)^n D_x z].$$

§ V. — *Dérivées d'ordre quelconque.*

88. $y = (a - bx)^p$.

89. $y = \cos ax$.

90. $y = \cos^2 x$.

91. $y = \cos^p x$, p entier positif.

92. $y = \log$.

93. $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

94. $y = e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta)$.

95. $y = e^{ax} \cos(bx + c)$.

96. $y = x(a + bx)^{\frac{p}{2}}$.

97. $y = x^p(1 - x)^p$.

98. $y = x^p \log x$.

99. $y = \dfrac{(a + x)^p}{(b + x)^q}$.

100. $y = e^{ax} \cos bx . x^p$.

101. $y = \dfrac{1}{a^2 - b^2 x^2}$.

102. $y = \dfrac{x}{a^2 - b^2 x^2}$.

103. $y = \dfrac{1}{a^2 + b^2 x^2}$.

104. $y = \dfrac{x}{a^2 + b^2 x^2}$.

105. $y = \log \dfrac{a + bx}{a - bx}$.

106. $y = \operatorname{arc} \sin x$.

107. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \dfrac{x}{a}$.

108. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \dfrac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha}$.

109. $y = \dfrac{1}{x^m - a^m}$, m entier positif.

110. $y = \dfrac{x^p}{x^m - a^m}$, m et p entiers positifs, $p < m$.

111. $y = e^{cx^2}$.

112. Déduire du numéro précédent les dérivées d'ordre quelconque de $\cos(x^2)$ et de $\sin(x^2)$.

113. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

114. Démontrer que deux fonctions u et v d'une même variable sont liées par la relation

$$(1) \left\{ \begin{aligned} v \mathrm{D}^n u = {} & \mathrm{D}^n (uv) - \binom{n}{1} \mathrm{D}^{n-1} (u \mathrm{D} v) + \binom{n}{2} \mathrm{D}^{n-2} (u \mathrm{D}^2 v) \\ & + (-1)^p \binom{n}{p} \mathrm{D}^{n-p} (u \mathrm{D}^p v) + \ldots + (-1)^n u \mathrm{D}^n v. \end{aligned} \right.$$

115. Prouver que la dérivée de l'ordre n de la fonction

$e^{ax}\varphi(x)$ peut être mise sous la forme symbolique

$$e^{ax}(a+D)^n\varphi(x).$$

116. En supposant $x = e^t$, démontrer qu'on a symboliquement

$$(D_t - n)\left(x^n D_x^n y\right) = x^{n+1} D_x^{n+1} y,$$

et conclure de là la relation

$$x^n D_x^n y = (D_t - 1)(D_t - 2)\ldots(D_t - \overline{n-1})\, D_t y.$$

117. Vérifier l'exactitude de la relation

$$D_x^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots.k}(2x)^{n-2k} f^{(n-k)}(x^2) + \ldots$$

La formule s'arrête dès qu'on arrive à un coefficient nul.

118. Déduire de la relation précédente l'équation

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin n\alpha,$$

où

$$x = \cos\alpha.$$

(O. Rodrigue.)

119. Calculer les dérivées successives de

$$y = (\text{arc}\sin x)^2$$

pour la valeur particulière $x = 0$.

120. Calculer les dérivées successives des fonctions

$$y = \cos\mu\,(\text{arc}\sin x), \quad z = \sin\mu\,(\text{arc}\sin x)$$

pour la valeur particulière $x = 0$.

On suppose que arc sin x représente le plus petit des arcs ayant x pour sinus.

§ VI. — *Développement des fonctions en séries.*

121. De la série de Taylor

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \dfrac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) \\ \qquad + \dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h), \end{cases}$$

déduire la suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} fx = f(0) + xf'(x) - \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) \\ \qquad + (-1)^{n+2} \dfrac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(\theta x), \end{cases}$$

et réciproquement.

122. Démontrer la relation

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x^2}{1+x} f'(x) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{2n}}{(1+x)^n} \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} + \frac{x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}} \frac{f^{(n+1)}\left(\dfrac{x+\theta x^2}{1+x}\right)}{1.2\ldots(n+1)}.$$

123. Étant données les deux séries convergentes

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\log y = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

trouver la relation qui existe entre leurs coefficients.

124. Développer $\cos^3 x$ en série convergente.

125. Développer $e^{h\cos x}\cos(h\sin x)$ et $e^{h\cos x}\sin(h\sin x)$ en séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes de h.

126. Appliquer la formule de Taylor et le résultat du n° 107 au développement en série de

$$\text{arc tang}(x+h), \quad 1 > x > -1.$$

On en déduira la relation

$$(1)\quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\cos^2\varphi \sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^3\varphi \sin 3\varphi}{3} + \ldots$$

127. Développer $y = \log\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$ en série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable.

128. Trouver la somme de la série

$$y = \frac{x}{(m+1)} + \frac{x^2}{2(m+2)} + \ldots + \frac{x^n}{n(m+n)} + \ldots.$$

On suppose m entier et $x < 1$.

129. Développer $y = (\arcsin x)^2$.

130. Du développement de $y = (\arcsin x)^2$, déduire

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right].$$

131. Démontrer que $\tang x$ est développable d'après la série de Maclaurin quand x est $< \frac{\pi}{2}$, et trouver la loi de formation des coefficients.

Même question pour $\operatorname{séc} x$.

132. Démontrer que les fonctions

$$y = \cos\mu(\arcsin x), \quad z = \sin\mu(\arcsin x)$$

sont développables en série d'après la formule de Maclaurin, et déterminer les coefficients de leurs développements.

133. Démontrer que la fonction

$$y = x \cot x$$

est développable en série de la forme

$$1 + a_2\frac{x^2}{1.2} + a_4\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + a_{2n}\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots$$

et trouver l'expression du coefficient a_{2n} en fonction de ceux qui le précèdent.

134. Si l'on pose

$$\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = 1 - B_1\frac{x^2}{1.2} - B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots - B_n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

on a aussi

$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_1\frac{x^2}{1.2} + B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + B_n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots$$

Calculer les six premiers coefficients.

135. Établir les relations

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \ldots,$$

$$\tang x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \ldots.$$

(N° 22.)

136. Démontrer qu'on a, pour toutes les valeurs de x plus petites que π en valeur absolue,

$$(1) \qquad \log\frac{\sin x}{x} = -\frac{S_2}{1}\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{S_4}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \ldots - \frac{S_{2n}}{n}\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} - \ldots,$$

$$(2) \quad \begin{cases} \log\cos x = -(2^2-1)\frac{S_2}{1}\frac{x^2}{\pi^2} - (2^4-1)\frac{S_4}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \ldots \\ \qquad - (2^{2n}-1)\frac{S_{2n}}{n}\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} + \ldots, \end{cases}$$

où l'on suppose

$$S_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

(N°s 11 et 22.)

137. Démontrer les formules

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} x\cot x = 1 - \dfrac{2S_2x^2}{\pi^2} - \dfrac{2S_4x^4}{\pi^4} - \dfrac{2S_6x^6}{\pi^6} - \ldots \\[2ex] \operatorname{tang} x = \dfrac{2(2^2-1)S_2x}{\pi^2} + \dfrac{2(2^4-1)S_4x^3}{\pi^4} \\[1ex] \qquad + \dfrac{2(2^6-1)S_6x^5}{\pi^6} + \ldots \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} x\cot x = 1 - \dfrac{2^2B_1x^2}{1.2} - \dfrac{2^4B_2x^4}{1.2.3.4} - \dfrac{2^6B_3x^6}{1.2.3\ldots6} - \ldots \\[2ex] \operatorname{tang} x = \dfrac{2^2(2^2-1)B_1x}{1.2} + \dfrac{2^4(2^4-1)B_2x^3}{1.2.3.4} \\[1ex] \qquad + \dfrac{2^6(2^6-1)B_3x^5}{1.2.3\ldots6} + \ldots \end{cases}$$

138. Trouver la relation

$$x\,\mathrm{coséc}\,x = 1 + \frac{2(2^1-1)B_1x^2}{1.2} + \frac{2(2^3-1)B_2x^4}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)B_3x^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots$$

139. Représenter par des séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes de x, les fonctions u et v définies par les équations

$$u = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots,$$

$$v = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{\overline{2n+1}^2\,\pi^2}\right)\cdots,$$

et en déduire leur expression sous forme finie.

§ VII. — *Changement de variables.*

140. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + e^y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$

Que devient cette équation lorsque la variable indépendante est y?

141.* $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = a.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$t = \log\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

142. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$x = e^t.$$

143. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$x = \cos t.$$

144. $(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dy^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2ay}{1-x} = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

145. $(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + by = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$t = \log(a+x).$$

146. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant qu'on a

$$x^2 = 4t.$$

(FOURIER, *Traité de la Chaleur.*)

147. Substituer la variable y à la variable x dans la différentielle

(1) $$du = \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}},$$

x et y étant liés par la relation

(2) $$\sin(2y - x) = k \sin x.$$

On suppose que la variable x ne dépasse pas $\frac{\pi}{2}$.

148. $$\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Transformer cette expression en une autre ne renfermant que r et θ, sachant qu'on a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

149. $$x\frac{du}{dy} - y\frac{du}{dx}.$$

Transformer cette expression en une autre dans laquelle les variables indépendantes soient r et θ, sachant qu'on a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

150. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

Éliminer les variables indépendantes x et y, sachant qu'on a

$$u = \varphi(r), \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

151. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Éliminer les variables indépendantes, sachant qu'on a

$$u = \varphi(r), \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

152. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$

Prendre pour variables indépendantes r et θ, sachant qu'on a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

153. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$

Prendre pour variables indépendantes r, θ et φ, sachant qu'on a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta\cos\varphi.$$

§ VIII. — *Élimination des constantes et des fonctions.*

154. Éliminer m de l'équation

$$(a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2.$$

155. Éliminer a, b, c et d de l'équation

$$ax + by + cz + d = 0, \quad y \text{ étant fonction de } x.$$

156. Éliminer la constante a de l'équation

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y (1 - e^2 \sin^2 a)^{\frac{1}{2}} = \cos a.$$

On suppose $e < 1$; le radical a le signe $+$.

157. Eliminer φ et ψ de l'équation

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

158. Eliminer φ de l'équation

$$u = x^n \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{y}\right).$$

159. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z).$$

160. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = \varphi(ay + bx)\psi(ay - bx).$$

161. De l'équation $u = F(z, r)$ éliminer F et r, sachant qu'on a

$$r = \varphi(ax + cz) = \psi(ax - by),$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires.

162. Éliminer les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de l'équation

$$u = \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(x)]^2}.$$

§ IX. — *Vraie valeur des expressions qui se présentent sous des formes indéterminées.*

163. $\dfrac{a^n - x^n}{\log(a^n) - \log(x^n)}$, pour $x = a$.

164. $\dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, pour $x = 1$.

165. $\dfrac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2 x^{n+3}}{(1-x)^3}$,

pour $x = 1$.

166. $\dfrac{(2a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}} - (5a^2 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}}{x(8a^2x^2 + 8ax^3)^{\frac{1}{4}} - (20a^6x^4 + 12a^4x^6)^{\frac{1}{5}}}$, pour $x = a$.

167. $\dfrac{x - (32a^2x - 24ax^2)^{\frac{1}{3}} + (40a^3x^3 + 24a^2x^4)^{\frac{1}{6}} - (2x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}}{3a(9x - 10a) + (36a^3x + 45x^4)^{\frac{1}{4}}(2x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}}$,

pour $x = a$.

168. $\dfrac{\pi x - 1}{2x^2} + \dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}$, pour $x = 0$.

169. $\dfrac{\pi}{4x} - \dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$, pour $x = 0$.

170. $\dfrac{\operatorname{tang} \pi x - \pi x}{2x^2 \operatorname{tang} \pi x}$, pour $x = 0$.

171. $\dfrac{\log(\operatorname{tang} px)}{\log(\operatorname{tang} x)}$, pour $x = 0$.

172. $x^n \log x$, pour $x = 0$.

173. x^{x^n}, pour $x = 0$.

174. $\dfrac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$, pour $x = 0$.

175. $\dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$, pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

176. $\dfrac{\sin(a+b)\sin(a+x) - \sin b \sin x}{\sin(a+b+x)}$,

pour $x = \pi - a - b$.

177. $(\cos ax)^{(\operatorname{cos\acute{e}c} bx)^2}$, pour $x = 0$.

178. $\dfrac{\operatorname{tang}(a+x) - \operatorname{tang}(a-x)}{\operatorname{arc\,tang}(a+x) - \operatorname{arc\,tang}(a-x)}$, pour $x = 0$.

179. $\dfrac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{g^x \sin gx - h^x \sin hx}$, pour $x = 0$.

180. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x}$, pour $x = 0$.

181. $\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, pour $x = 0$.

182. $x - x^2 \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, pour $x = \infty$.

183. $\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}}$, pour $x = a$.

184. $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$.

Vraie valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ pour $x = 0$.

185. $(y^2 + x^2)^2 - 6axy^2 = ax^2(2x - a)$.

Vraie valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ pour $x = 0$.

§ X. — *Maxima et minima.*

186. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

187. $y = \dfrac{1}{20000}\left[\begin{array}{r} x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x \\ + 3888000 \end{array}\right]$.

188. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

189. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

190. $y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

191. $y = \dfrac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

192. $y = \dfrac{\log x}{x^n}$.

193. $y = \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)(7 - x)^2$.

194. $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$, max. et min. de y.

195. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, max. et min. de y.

196. $y^4 + x^4 - 4xy + 2 = 0$, max. et min. de y.

197. $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$, max. et min. de y.

198. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

199. $u = x^2y^2(a - x - y)$.

200. $u = \dfrac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$.

201. $u = rx^2 + 2sxy + ty^2$,

x et y étant liés par la relation

$$1 = (1 + p^2)x^2 + 2pqxy + (1 + q^2)y^2.$$

202. $u = a\cos^2 x + b\cos^2 y$,

x et y étant liés par la relation

$$y - x = \frac{\pi}{4}.$$

203. $u = (x+1)(y+1)(z+1)$,

avec la condition

$$a^x b^y c^z = \mathrm{A}.$$

204. Trouver, sur une droite donnée, un point tel, que la somme de ses distances à deux points donnés soit un minimum.

205. Quel est le rayon du cercle dans lequel, à un arc de longueur donnée, correspond le segment maximum?

206. (*Fig.* 2.) Étant données les parallèles AC, BD et la ligne AB, mener, par le point donné C, la ligne CXY, telle, que la somme des triangles BXY et AXC soit un minimum. (VIVIANI.)

207. (*Fig.* 3.) PMO est un triangle sphérique rectangle en M; déterminer la position du point P par la condition que PO — MO soit un maximum.

208. Sur la ligne qui joint les centres de deux sphères extérieures l'une à l'autre, trouver un point tel, que la somme des zones vues de ce point soit la plus grande possible.

209. Étant donné un prisme hexagonal régulier, on joint de deux en deux les sommets de l'une de ses bases, puis on mène par les droites ainsi obtenues des plans également inclinés sur la base et formant une pyramide. On demande quelle doit être l'inclinaison de ces plans pour que le volume total résultant ait la plus petite surface? On ne fait pas entrer dans le volume les portions du prisme qui sont en dehors de l'angle solide au sommet de la pyramide.

210. Étant donné un cône droit, on demande de le couper parallèlement à la génératrice par un plan tel, que le segment parabolique résultant soit le plus grand possible.

211. Déterminer l'ellipse la plus grande qu'on puisse obtenir en coupant par un plan un cône droit donné.

212. Parmi tous les secteurs sphériques de volume donné, trouver celui dont la surface totale est la plus petite possible.

213. Parmi tous les vases de même capacité dont la forme est celle d'un tronc de cône, et dans lesquels l'arête fait avec le fond un angle donné, trouver celui dont la surface totale est la plus petite possible.

214. Un point lumineux M est mobile sur la circonférence d'un cercle donné; il éclaire une surface infiniment petite ω dont le plan est perpendiculaire à celui du cercle et passe par son centre. Cette surface pouvant être regardée comme située en un point P de l'intersection des deux plans et intérieure au cercle, on demande la position que doit occuper le point M pour que la surface ω en reçoive un éclairement maximum.

L'éclairement est proportionnel au sinus de l'angle de la direction des rayons lumineux avec la surface éclairée, et en raison inverse du carré de la distance du point lumineux à cette surface.

215. Remplaçant, dans la question précédente, la circonférence par une droite AY qui rencontre le plan de la surface ω au point A, et se projette sur le plan suivant une droite AX qui contient le point P, on demande quelle position doit occuper le point M sur la droite AY pour que l'éclairement de la surface ω soit maximum.

216. Trouver, sur une circonférence donnée, un point tel, que la somme de ses distances à deux points donnés A et B soit un maximum ou un minimum.

217. Inscrire dans un ellipsoïde donné le parallélipipède maximum.

218. Trouver le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné.

219. La surface qui a pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

étant coupée par un plan donné qui passe par son centre, on demande les distances maximum et minimum de ce centre au périmètre de la section.

220. Surface de la section faite dans un ellipsoïde par un plan qui passe au centre.

221. Volume de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = C.$$

222. Circonscrire à un triangle donné la plus petite ellipse possible. (EULER.)

223. Inscrire dans un triangle donné la plus grande ellipse possible.

224. De toutes les pyramides triangulaires qui ont même base et même hauteur, quelle est celle qui a la plus petite surface?

225. Trouver un point tel, que la somme de ses distances à trois points donnés soit la plus petite possible.

§ XI. — *Tangentes aux courbes planes.*

226. Sous-tangente de la courbe qui a pour équation

$$x = e^{\frac{x-y}{y}}.$$

227. (*Fig.* 9.) Soient AB, AC, EF trois tangentes à la parabole BDC; si par les points E, F, où EF rencontre les deux autres, on mène des parallèles à ces lignes, ces parallèles se rencontrent sur la droite de contact BC.

228. La courbe qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

est constamment touchée par une droite de longueur invariable qui glisse en s'appuyant sur les axes coordonnés.

229. Généraliser le problème de la cycloïde, en substituant un cercle à la droite fixe et supposant que le point décrivant, toujours invariablement attaché au plan du cercle mobile, n'est plus situé sur la circonférence. Tangentes aux courbes ainsi obtenues.

230. Si, dans le plan d'une courbe donnée, on projette un point fixe A sur toutes les tangentes à cette courbe, on obtient un lieu géométrique tel, que la tangente en un de ses points μ, correspondant au point M de la courbe donnée, est aussi tangente à la circonférence décrite sur AM comme diamètre.

231. Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à une même figure fermée convexe, trouver celui qui est le plus petit.

232. Si l'on mène à plusieurs courbes données, à partir d'un point μ situé dans le plan de ces courbes, des normales qui les rencontrent aux points $m_1, m_2, m_3, \ldots$, et si le point μ se déplace de manière qu'on ait toujours

$$\overline{\mu m_1}^2 + \overline{\mu m_2}^2 + \overline{\mu m_3}^2 + \ldots = \text{const.},$$

la normale au lieu qu'il décrit passe par le centre des moyennes distances des points $m_1, m_2, m_3, \ldots$.

233. Soit AMB un arc d'une courbe donnée. La corde $AB = a$ étant fixe, on demande quelle doit être la position du point M sur cet arc pour que la somme des cordes

AM + MB soit un maximum. — Solution géométrique de la même question.

234. Trois courbes étant données, on prend un point sur chacune d'elles et l'on demande comment ces points doivent être choisis pour que le triangle dont ils sont les sommets ait une surface maximum ou minimum. — Cas particulier où les trois courbes se réduisent à une même ellipse.

235. Mener à l'ellipse une normale telle, que la portion de cette ligne droite comprise dans la courbe soit la plus grande ou la plus petite possible. (O. BONNET.)

236. Trouver, dans la spirale logarithmique :

1° Le lieu des extrémités de la sous-tangente;

2° Le lieu des extrémités de la sous-normale.

237. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du pôle sur les tangentes à la courbe qui a pour équation

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

238. Soit m un point d'une courbe dont l'équation est

$$f(u, v) = 0,$$

et dans laquelle les variables u et v peuvent représenter :

1° Les distances du point aux droites A et B;

2° Les distances du point aux points fixes P et Q;

3° u la distance du point à A, et v la distance à P.

Dans tous les cas, si l'on porte, à partir de m et parallèlement aux directions des droites u et v, des longueurs proportionnelles à f'_u, f'_v, en ayant égard aux signes, la diagonale du parallélogramme construit sur ces longueurs sera dirigée suivant la normale au point m.

(JOACHIMSTHAL).

239. Équation de la tangente à une courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{r} = f(\theta).$$

240. Si l'on fait rouler dans un plan une courbe A sur une courbe fixe B, les positions successives d'un point μ, invariablement lié à A, déterminent une nouvelle courbe dont la normale en chaque point passe par le point de contact des courbes A et B. (DESCARTES.)

§ XII. — *Construction de courbes. — Points d'inflexion et autres points singuliers.*

241. $xy^2 = 2a(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

242. $ax^3 + by^3 - c^4 = 0$.

243. $x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0$.

244. $y = b + (x - a)^{\frac{m}{n}}$.

245. $x^4 - ax^2y + by^2 = 0$.

246. $x^4 - 2ax^2y - 2x^2y^2 + ay^3 + y^4 = 0$.

247. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$.

248. $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0$.

249. $(by - cx)^2 = (x - a)^5$.

250. $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{a^2y^2}{4} = 0$.

251. $a^2y^2 - 2a^2(a + x)xy + a(a + x)^2x^2 - x^5 = 0$.

252. $16(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a^2)^2 = 0$.

253. $y^2(2x - a) + a^2x^2 - x^4 = 0$.

254. $y^4 + x^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0$.

255. $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$.

256. $y^2 = x\sin^2 x$.

257. $r^2 = \dfrac{a^2}{\theta}$.

258. $r = \dfrac{a + b\sin\theta}{\sin\theta}$. (Conchoïde.)

259. $r = a(\operatorname{tang}\theta - 1)$.

260. $r^2 = a^2 \dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$.

§ XIII. — *Rayons de courbure et développées des courbes planes.*

261. $y^2 = 2px + qx^2$.

262. $3ay^2 = x^3$. (Parabole semi-cubique.)

263. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$. (Cissoïde.)

264. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Cardioïde) (n° 229).

265. $y = ae^{\frac{x}{a}}$. (Logarithmique.)

266. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. (Chaînette.)

267. $y + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \dfrac{dy}{dx} = 0$. (Tractrice.)

268. $r = ae^{\frac{\theta}{\alpha}}$. (Spirale logarithmique.)

269. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{ar}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$.

270. $r^2 = \cos 2\theta$. (Lemniscate.)

271. Épicycloïde (n° 229).

272. Soient $mA = r$ la distance d'un point m d'une courbe à l'origine A des axes supposés rectangulaires, p la perpendiculaire abaissée de A sur la tangente en m,

α l'angle de cette tangente avec l'axe des x, ds l'élément de l'arc et ρ le rayon de courbure; on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = p + \frac{d^2p}{d\alpha^2} = r\frac{dr}{dp}.$$

273. Dans toute courbe dont l'équation satisfait à la relation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[4a^2y^2 - (b^2+y^2)^2]^{\frac{1}{2}}}{b^2+y^2},$$

la différence entre l'inverse de la longueur de la normale et l'inverse du rayon de courbure est indépendante de b.

274. Lorsqu'en un point d'une courbe le rayon de courbure est maximum ou minimum, le contact de la courbe et du cercle osculateur en ce point est du troisième ordre.

275. Soit une droite OM qui passe par un point fixe O et rencontre en A_1, A_2,..., A_n, n courbes données (A_1), (A_2),..., (A_n). Le point M est tel qu'on a

$$\frac{a_1}{OA_1} + \frac{a_2}{OA_2} + \ldots + \frac{a_n}{OA_n} = \sum \frac{a}{OA} = \frac{m}{OM},$$

a_1, a_2,..., a_n, m étant des constantes. Lorsque la transversale OM tourne autour du point O, le point M décrit une courbe (M) et l'on a

$$\sum \frac{a}{\rho \cos^3\alpha} = \frac{m}{R\cos^3\mu},$$

ρ_k étant le rayon de courbure de la courbe (A_k) et α_k l'angle que fait ce rayon avec la transversale. R et μ sont des quantités analogues pour la courbe (M).

§ XIV. — *Géométrie à trois dimensions.*

276. Etant données deux droites D et D_1 représentées

par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1},$$

on demande :

1° La direction de la plus courte distance des droites D et D_1 ;

2° La longueur de cette plus courte distance;

3° Les coordonnées des points de D et de D_1 dont la distance est un minimum.

277. Soient, en un point M d'une courbe à double courbure, a, b, c les *cosinus directeurs* de la tangente, α, β, γ ceux de l'*axe* du plan osculateur, ω l'angle de contingence, u l'angle de torsion; sachant qu'on a les relations

$$(1) \qquad \lambda = \rho \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{da}{\omega}, \quad \mu = \frac{db}{\omega}, \quad \nu = \frac{dc}{\omega},$$

où λ, μ, ν désignent les *cosinus directeurs* de la normale principale, prouver qu'on a aussi

$$(2) \qquad \lambda = -\frac{d\alpha}{u}, \quad \mu = -\frac{d\beta}{u}, \quad \nu = -\frac{d\gamma}{u}.$$

278. Déduire des équations (2) du numéro précédent la formule connue

$$u = ds \frac{dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

279. Les notations étant celles du n° 277, démontrer les formules

$$d\lambda = \alpha u - a\omega, \quad d\mu = \beta u - b\omega, \quad d\nu = \gamma u - c\omega;$$

et tirer de là l'équation

$$\psi^2 = \omega^2 + u^2,$$

ψ désignant l'angle de deux normales principales infiniment voisines.

280. Soient M un point d'une courbe C, M_1 le point correspondant de la courbe C_1 lieu des centres de courbure de C; trouver les angles que la tangente en M_1 fait avec la tangente, la normale principale et le plan osculateur au point M.

281. Soient M et M' deux points infiniment voisins d'une courbe donnée; P un plan mené par M perpendiculairement à la normale principale en ce point; P' le plan analogue en M'; le point M étant supposé fixe, déterminer l'intersection limite L de ces deux plans, et en conclure une représentation géométrique de la seconde courbure.

(Lancret a donné au plan P le nom de *plan rectifiant* et celui de *droite rectifiante* à la ligne L.)

282. En un point M d'une courbe à double courbure, déterminer l'intersection limite m du plan normal avec deux plans normaux infiniment voisins et trouver l'expression de la longueur Mm.

Le point m est le *centre de la sphère osculatrice* dont Mm est le rayon.

283. Si le rapport des deux courbures d'une courbe est constant, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque. (J. Bertrand.)

284. La courbe dont les deux courbures en chaque point sont constantes est une hélice tracée sur un cylindre à base circulaire. (Puiseux.)

285. Étant donnée une courbe AB, on en déduit une autre A_1B_1, en portant, à partir de chaque point M de la

première, une longueur constante $MM_1 = h$ sur la normale principale en ce point. Trouver les angles que la tangente en M_1 à la courbe A_1B_1 fait avec la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur de la courbe AB au point M.

286. Les données étant celles du n° 285, trouver les conditions :

1° Pour que les tangentes aux points correspondants des deux courbes soient parallèles;

2° Pour que les normales principales correspondantes coïncident.

287. Étant donnée une courbe qui rencontre toutes les génératrices d'une surface réglée, et telle, que les cosinus directeurs de chaque génératrice, au point où elle coupe la courbe, soient des fonctions des coordonnées de ce point, on demande :

1° La direction limite de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines;

2° La limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\delta}{\nu}$, δ étant la plus courte distance et ν l'angle de ces génératrices;

3° La position limite, sur l'une des génératrices, du point où elle est coupée par sa plus courte distance à l'autre.

288. Les données étant celles du numéro précédent, si δ est une quantité infiniment petite par rapport à ν, elle est au moins du troisième ordre infinitésimal. (Bouquet.)

289. Dans les surfaces pour lesquelles δ est un infiniment petit d'ordre supérieur à ν, le plan tangent en un point est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point. (Surfaces développables.)

290. Toute surface développable (n° 289) peut être

regardée comme le lieu des tangentes à une courbe à double courbure, et réciproquement.

291. Les plans tangents d'une surface développable sont en même temps les plans osculateurs de son *arête de rebroussement* (n° 290).

292. La condition nécessaire et suffisante (n° 289) pour qu'une surface réglée soit développable peut être remplacée par les relations

$$\frac{dl}{a - l\cos\theta} = \frac{dm}{b - m\cos\theta} = \frac{dn}{c - n\cos\theta},$$

θ désignant l'angle de la génératrice avec la *courbe directrice* (n° 287).

293. Par chaque point d'une courbe à double courbure on mène une perpendiculaire à la tangente en ce point; condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée ainsi obtenue soit développable.

294. Par chaque point d'une courbe A on mène une perpendiculaire à la tangente, de manière à former une surface développable. On demande de déterminer en un point M_1 de l'arête de rebroussement A_1 répondant au point M de la courbe donnée :

1° Les deux courbures de la ligne A_1;

2° L'élément de l'arc de cette courbe.

(La courbe A_1 est une des *développées* de la courbe A.)

295. Des relations du n° 292 déduire l'équation générale des lignes de courbure.

296. Si l'intersection AB de deux surfaces S et S_1 est une ligne de courbure de chacune d'elles, ces surfaces se coupent partout sous le même angle; et réciproquement, si deux

surfaces se coupent partout sous le même angle, et si l'intersection est une ligne de courbure de l'une d'elles, elle sera aussi une ligne de courbure de l'autre.

297. Lieu des projections du centre de l'ellipsoïde sur ses plans tangents.

298. Mener un plan tangent à la surface dont l'équation est

$$(a^2 - z^2)x^2 - b^2y^2 = 0,$$

et trouver l'intersection de ce plan avec la surface.

299. Plan tangent à l'hélicoïde gauche

$$x \cos \frac{2\pi z}{h} - y \sin \frac{2\pi z}{h} = 0,$$

et distance de l'origine à ce plan.

300. Le plan tangent à l'hélicoïde développable

$$x \sin \left[\frac{2\pi z}{h} - \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \right] + y \cos \left[\frac{2\pi z}{h} - (x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \right] = a$$

fait un angle constant avec le plan xy.

301. Équation du plan tangent à la surface

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

et distance du centre à ce plan.

302. Trouver sur une sphère le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux points fixes, pris sur la sphère, soit une quantité constante. Tangente et plan normal en un point de lieu. (Ellipse sphérique.)

303. Plan osculateur de la courbe d'intersection de deux cylindres droits dont les axes se coupent rectangulairement.

304. Un grand cercle d'une sphère se meut d'un mouvement uniforme autour d'un de ses diamètres supposé fixe,

pendant qu'un point parcourt sa circonférence avec le même mouvement uniforme; on demande : 1° la ligne décrite par le point; 2° le rayon de courbure de cette ligne; 3° son plan osculateur.

305. Plan osculateur de l'ellipse sphérique (n° 302).

306. Rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde.

307. Rayons de courbure principaux du paraboloïde

$$\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}=x.$$

308. Rayons de courbure principaux de la surface

$$xyz=m^3.$$

309. Rayons de courbure principaux de l'hélicoïde gauche (n° 299).

§ XV. — *Enveloppes des lignes et des surfaces.*

310. Enveloppe des ellipses concentriques dont les axes ont les mêmes directions, et pour lesquelles la somme de ces axes est constante.

311. Enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut en s'appuyant sur deux droites rectangulaires.

312. Enveloppe des paraboles déterminées par l'équation

$$y=ax-(1+a^2)\frac{x^2}{4c},$$

a étant un paramètre variable.

313. Enveloppe des cercles donnés par l'équation

$$(x-a)^2+y^2=b^2,$$

avec la condition $b^2=4ma$.

314. On donne deux droites OaA, ObB, sur lesquelles les points A et B sont fixes et les points a et b mobiles, de telle sorte qu'on ait constamment $Oa.Ob = aA.bB$; trouver l'enveloppe des positions de la droite ab.

315. Enveloppe de la droite qui joint, dans une ellipse donnée, les extrémités de deux diamètres conjugués, en supposant qu'on fasse varier le système de ces diamètres.

316. Enveloppe des cordes de contact qu'on obtient en menant, des points d'une section conique, des tangentes à une autre section conique située dans le même plan.

317. Par chaque point d'une courbe donnée on mène une droite inclinée sur la normale d'un angle variable avec le point; on demande l'élément de l'arc de la courbe enveloppe des droites ainsi obtenues.

318. Si l'on regarde les tangentes d'une courbe A comme des rayons lumineux qui se réfractent en tombant sur une courbe C, les rayons réfractés enveloppent une nouvelle courbe A_1. Cela posé, soient m un point de la courbe C auquel aboutit une tangente de la courbe A, α et α_1 l'angle d'incidence et l'angle de réfraction, ρ le rayon de courbure en m, r et r_1 les rayons de courbure correspondants de A et de A_1; on demande la relation qui existe entre les quantités α, α_1, ρ, r, r_1 et l'indice de réfraction $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$.

(N° 317.)

319. Un plan variable coupe un parallélipipède de manière à en détacher un tétraèdre dont le volume est constant; surface enveloppe de ce plan.

320. Enveloppe d'une sphère donnée dont le centre se meut sur une circonférence aussi donnée.

321. Surface enveloppe d'un plan variable qui détache d'un cône droit un cône oblique à volume constant.

322. On coupe un ellipsoïde par un plan déterminé; enveloppe des plans tangents menés à la surface par les points de l'intersection.

323. Surface enveloppe du plan

$$lx + my + nz = p,$$

les paramètres variables l, m, n, p étant liés par les équations

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \frac{l^2}{p^2 - a^2} + \frac{m^2}{p^2 - b^2} + \frac{n^2}{p^2 - c^2} = 0.$$

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

SOLUTIONS.

§ I. — Introduction. — *Séries, produits de facteurs en nombre infini.*

1. 1° Si l'on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la série (1), comme on a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

il en résulte

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\text{limite } S_n = 1.$$

2° Semblablement, S'_n se rapportant à la deuxième série, de

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

on déduit

$$2S'_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right);$$

d'où

$$\lim. S'_n = \frac{3}{4}.$$

3° On trouve de la même manière pour la somme S''_n, qui se rapporte à la troisième série,

$$m S''_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}\right)$$

et par suite

$$\lim. S''_n = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

Les séries (1) et (2) ont été données par Leibnitz dans une de ses lettres à Oldenbourg (1676), au début des recherches qui l'ont conduit au Calcul différentiel.

2. Si l'on multiplie chaque terme par b et qu'on pose

$$a = \alpha b,$$

on obtient la série

(1) $$\frac{1}{\alpha+1}, \quad \frac{1}{\alpha+2}, \ldots, \quad \frac{1}{\alpha+n},$$

dont les termes sont respectivement plus grands que ceux de la série

(2) $$\frac{1}{h+1}, \quad \frac{1}{h+2}, \ldots, \quad \frac{1}{h+n},$$

en désignant par h un nombre entier quelconque supérieur à α.

Or, la série (2) n'est autre que la série harmonique dans laquelle il manque un nombre fini de termes; la série proposée est donc divergente.

Cette conclusion subsiste, que le rapport α soit positif ou négatif.

3. On vérifie que la relation est vraie pour $n = 1$ et

$n=2$; puis, en la supposant démontrée pour une certaine valeur n, on fait voir qu'elle subsiste quand on y remplace n par $n+1$.

4. Soit fait

$$\frac{1}{3x(x+1)(x+2)}=f(x);$$

il en résulte

$$f(x)-f(x+1)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$

de même,

$$f(x+1)-f(x+2)=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f(x+n)-f(x+n+1)=\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et faisant croître n indéfiniment, on obtient la relation proposée.

5. La relation est connue pour $\mu=1$, et se vérifie pour $\mu=2$ au moyen de la règle à suivre pour la multiplication de deux séries convergentes. Afin de la démontrer généralement, supposons-la vraie pour l'exposant μ. En posant, pour abréger,

$$a_p=\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p},$$

on a

$$(1+x)^{-\mu}=1-a_1x+a_2x^2+\ldots+(-1)^p a_p x^p+\ldots,$$

et pour $\mu=1$,

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^p x^p+\ldots.$$

Le produit des premiers membres de ces égalités est $(1+x)^{-(\mu+1)}$, et celui des seconds membres a pour terme général

$$(-1)^p(1+a_1+a_2+\ldots+a_p)x^p.$$

Or,

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p}=\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p)}{1.2\ldots p};$$

par conséquent,

$$(1+x)^{-(\mu+1)}=1-(\mu+1)x\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}x^2-\ldots$$
$$+(-1)^p\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p)}{1.2\ldots p}x^p+\ldots.$$

Ainsi la relation proposée subsiste quand on y remplace μ par $\mu+1$; elle est donc générale.

6. Par hypothèse, la somme de la série demeure la même quand on y remplace par des zéros les quantités $h_1, h_2, \ldots$; cette somme est donc égale à

$$\frac{a}{a-x}.$$

Il en résulte qu'on a

$$1=\frac{a-x}{a}+\frac{x}{a}\frac{a-x}{a+h_1}+\frac{x}{a}\frac{x+h_1}{a+h_1}\frac{a-x}{a+h_2}$$
$$+\frac{x}{a}\frac{x+h_1}{a+h_1}\frac{x+h_2}{a+h_2}\frac{a-x}{a+h_3}+\ldots.$$

Or,

$$\frac{a-x}{a+h_1}=1-\frac{x+h_1}{a+h_1},\quad \frac{a-x}{a+h_2}=1-\frac{x+h_2}{a+h_2},$$

et ainsi de suite. Si donc on pose généralement

$$\frac{x+h_p}{a+h_p}=\alpha_p,$$

il vient

$$1=\frac{a-x}{a}+\frac{x}{a}[1-\alpha_1+\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3)+\ldots],$$

ce qui est évident.

On voit par là que la série proposée n'est autre chose qu'une transformation de l'identité

$$1 = 1 - \alpha_1 + \alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3) + \ldots,$$

où les α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$, représentent des fractions quelconques.

7. Le rapport du terme de rang $n+2$ au terme précédent est égal à

$$\frac{a+n}{b+n} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}x,$$

et tend vers x quand n croît indéfiniment. La série est donc convergente ou divergente selon que x est inférieur ou supérieur à 1. Dans le cas où $x = 1$, le rapport précédent peut s'écrire

$$\frac{1}{1+\frac{b-a}{a+n}},$$

et l'on sait qu'alors la série est convergente ou divergente selon que $\lim. n\frac{b-a}{a+n}$, c'est-à-dire $b-a$, est une quantité plus grande ou plus petite que 1. Dans ce cas, la série rentre dans la formule du n° 6 et a par conséquent pour somme $\frac{b-1}{b-a-1}$.

Si l'on a à la fois $x = 1$, $b - a = 1$, la série est manifestement divergente.

8. 1° Soit $\alpha > 1$. On a

$$S_{n+1} < x^\alpha\left[\frac{1}{a^\alpha} + \frac{1}{(a+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^\alpha}\right],$$

et l'on sait que le second membre tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment. La série (1) est donc convergente.

Si l'on suppose $\alpha < 1$, comme le rapport $\frac{\sin u}{u}$ tend vers l'unité à mesure que l'arc u tend vers o, on peut toujours faire en sorte qu'on ait, pour toutes les valeurs de n à partir d'une valeur p,

$$\sin\frac{x}{a+n} > k\frac{x}{a+n},$$

k étant un nombre déterminé plus petit que 1.

De là résulte

$$\sin^\alpha\left(\frac{x}{a+p}\right)+\sin^\alpha\left(\frac{x}{a+p+1}\right)+\ldots+\sin^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right)$$
$$> k^\alpha x^\alpha\left[\frac{1}{(a+p)^\alpha}+\frac{1}{(a+p+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(a+n)^\alpha}\right].$$

Le second membre de l'inégalité augmentant sans limite avec n, la série est divergente.

On reconnaît qu'elle l'est aussi pour $\alpha = 1$.

2° Soit $\alpha > 1$. On a, pour toutes les valeurs de n autres que zéro,

$$\tang\frac{x}{a+n} < \frac{\sin\left(\frac{x}{a+n}\right)}{\cos\left(\frac{x}{a}\right)};$$

par conséquent,

$$S_{n+1} < \frac{1}{\cos^\alpha\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\sin^\alpha\left(\frac{x}{a}\right)+\sin^\alpha\left(\frac{x}{a+1}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\sin^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right)\right],$$

ce qui démontre la convergence de la série. Si l'on suppose $\alpha < 1$, on a

$$S_{n+1} > x^{\alpha}\left[\frac{1}{a^{\alpha}} + \frac{1}{(a+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^{\alpha}}\right];$$

la série est donc divergente, et elle l'est encore si $\alpha = 1$.

9. Observons d'abord qu'on a, pour toutes les valeurs positives de x et pour les valeurs négatives de x plus grandes que -1,

$$\text{(A)} \qquad \log(1 + x) < x.$$

Cette inégalité résulte immédiatement de la relation

$$e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{1\,.\,2}\left(1 \pm \frac{x}{3}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{2n}}{1\,.\,2\ldots 2n}\left(1 \pm \frac{x}{2n+1}\right) + \ldots.$$

On tire d'ailleurs de (A)

$$\log\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) > x,$$

ou, en faisant $y = \frac{x}{1-x}$,

$$\text{(B)} \qquad \log(1 + y) > \frac{y}{1+y}.$$

Cela posé, la série (1) revient à la suivante :

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{a+1}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\log\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{a+n}\right) + \ldots,$$

laquelle est convergente en vertu de (A) et d'un résultat du numéro précédent.

Quant à la série (2), elle est divergente (n° 8), car les séries

$$\tan g\frac{x}{a},\quad \tan g\frac{x}{a+1},\ldots,\quad \tan g\frac{x}{a+n},\ldots,$$

$$(3)\qquad \frac{\tan g\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1+\tan g\left(\dfrac{x}{a}\right)},\quad \frac{\tan g\left(\dfrac{x}{a+1}\right)}{1+\tan g\left(\dfrac{x}{a+1}\right)},\ldots,\quad \frac{\tan g\left(\dfrac{x}{a+n}\right)}{1+\tan g\left(\dfrac{x}{a+n}\right)},\ldots,$$

sont divergentes l'une et l'autre, et, en vertu de (B), chaque terme de la série (2) est plus grand que le terme correspondant de la série (3).

10. Soit

$$(1)\qquad y=\sum_{p=0}^{p=n}\sin(a+p\alpha).$$

Le produit d'un sinus par un cosinus étant facilement transformé en une somme ou une différence de sinus, on conçoit que si l'on multiplie les deux membres de l'équation (1) par $2\cos\alpha$, on puisse faire apparaître, dans le second membre de la nouvelle équation, la quantité inconnue y. On trouve, en effet,

$$(2)\qquad 2y\cos\alpha=\sum_{p=0}^{p=n}\sin\left(a+\overline{p+1}\,\alpha\right)+\sum_{p=0}^{p=n}\sin\left(a+\overline{p-1}\,\alpha\right),$$

où la première somme du second membre représente

$$y+\sin\left(a+\overline{n+1}\,\alpha\right)-\sin a,$$

et la deuxième

$$y-\sin(a+n\alpha)+\sin(a-\alpha).$$

L'équation (2) nous conduit alors, après des substitutions

évidentes, à la relation

$$y = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(a + \frac{n\alpha}{2}\right).$$

On trouve semblablement que la seconde somme est égale à

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos\left(a + \frac{n\alpha}{2}\right).$$

On obtiendrait par le même procédé la valeur des sommes

$$\sum_{p=0}^{p=n} x^p \sin(a + p\alpha), \quad \sum_{p=0}^{p=n} x^p \cos(a + p\alpha).$$

(N° 24.)

11. Pour établir la convergence de la série (u_0), il suffit de montrer que la somme

$$u_0^{(m+1)} + u_0^{(m+2)} + \ldots + u_0^{(m+p)}$$

est aussi petite qu'on veut pour m suffisamment grand, quelle que soit la valeur de p. Or, cette somme n'est qu'une partie de la suivante :

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \ldots + u_n^{(m+1)} \\ + u_0^{(m+2)} + u_1^{(m+2)} + \ldots + u_n^{(m+2)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(m+p)} + u_1^{(m+p)} + \ldots + u_n^{(m+p)}, \end{array} \right.$$

qui est moindre elle-même que la somme

$$\mathrm{H}^{(m+1)} + \mathrm{H}^{(m+2)} + \ldots + \mathrm{H}^{(m+p)},$$

et cette dernière est aussi petite qu'on veut à cause de la

convergence de la série (A). On établit absolument de même la convergence des séries $(u_1), (u_2), \dots, (u_n)$.

Cela posé, on a les équations

$$
(C)\quad \left\{
\begin{array}{l}
H^{(0)} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \rho^{(0)}, \\
H^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \dots + u_{n-1}^{(1)} + \rho^{(1)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
H^{(m-1)} = u_0^{(m-1)} + u_1^{(m-1)} + \dots + u_{n-1}^{(m-1)} + \rho^{(m-1)},
\end{array}
\right.
$$

dans lesquelles $\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(m-1)}$ désignent des quantités aussi petites qu'on veut quand n est suffisamment grand. On peut donc supposer chacune d'elles moindre que $\frac{\varepsilon}{m}$, ε étant très-petit et m très-grand.

On a de même

$$
(D)\quad \left\{
\begin{array}{l}
V_0 = u_0 + u_0^{(1)} + \dots + u_0^{(m-1)} + \sigma_0, \\
V_1 = u_1 + u_1^{(1)} + \dots + u_1^{(m-1)} + \sigma_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
V_{n-1} = u_{n-1} + u_{n-1}^{(1)} + \dots + u_{n-1}^{(m-1)} + \sigma_{n-1},
\end{array}
\right.
$$

chacune des quantités σ étant supposée plus petite que $\frac{\varepsilon}{n}$.

Il suit de là que les deux sommes

$$H^{(0)} + H^{(1)} + \dots + H^{(m-1)}, \quad V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1},$$

ont une différence qui tend vers zéro quand m et n croissent indéfiniment; la limite de la première est donc aussi la limite de la seconde. C. Q. F. D.

Dans le cas où les termes sont quelconques, et sous la condition énoncée, on voit que la *valeur absolue* de la somme $u_0^{(m+1)} + u_0^{(m+2)} + \dots + u_0^{(m+p)}$ est toujours moindre que la valeur absolue de la somme (B), inférieure elle-même à celle de l'expression

$$H_0^{(m+1)} + H_0^{(m+2)} + \dots + H_0^{(m+p)},$$

et l'on sait que cette dernière tend vers zéro, quel que soit p, à mesure que m croît indéfiniment. De là résulte encore la convergence de la série (u_0), et l'on arrive de la même manière à celle des séries (u_1), (u_2),..., (u_n). La démonstration s'achève comme dans le premier cas.

Le théorème subsiste évidemment lors même qu'on suppose quelques-unes des séries (C) ou (D) composées d'un nombre fini de termes. Chaque série de cette espèce peut en effet être considérée comme une série convergente indéfiniment prolongée, mais dans laquelle s'évanouissent tous les termes dont le rang surpasse un nombre donné.

Ce théorème important, dû à M. Cauchy (*Anal. algéb.*, p. 537), est utile dans la recherche du développement des fonctions en séries. (*Voir* § VI.)

12. L'expression

$$\left(1 - \frac{2x}{1+x^2}\cos\alpha\right)^{-1},$$

dans laquelle $\frac{2x}{1+x^2}$ est moindre que l'unité, peut se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de cette quantité, ce qui donne

$$(1)\qquad y = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (2x\cos\alpha)^{\lambda}(1+x^2)^{-(\lambda+1)}.$$

On a aussi (n° 5)

$$(2)\qquad (1+x^2)^{-(\lambda+1)} = 1-(\lambda+1)x^2+\ldots+(-1)^p\binom{\lambda+p}{p}x^{2p}+\ldots$$

Or, les séries (1) et (2) sont convergentes, et la seconde ne cesse pas de l'être quand on y donne le même signe à tous ses termes; il suit de là (n° 11) que, si l'on développe chaque terme de la série (1) en une série de la forme (2),

la série nouvelle à laquelle on arrive en ordonnant les résultats obtenus suivant les puissances croissantes de x est aussi convergente et a pour somme y. Il faut donc calculer, dans chacune des séries que renferme l'équation (1), les termes où la lettre x est affectée d'un même exposant. Or le terme général du développement qui répond à la valeur λ étant

$$\text{(T)} \qquad (2\cos\alpha)^{\lambda}(-1)^{p}\binom{\lambda+p}{p}x^{\lambda+2p},$$

on voit que les puissances de x que ce développement contient sont de même parité que λ. On est donc conduit à chercher séparément le multiplicateur de x^{2n} et celui de x^{2n+1}.

Dans le premier cas, posons

$$\lambda+2p=2n, \quad \lambda=2\mu, \quad \text{d'où} \quad p=n-\mu.$$

Le terme général devient alors

$$(-1)^{n-\mu}\binom{n+\mu}{n-\mu}(2\cos\alpha)^{2\mu}x^{2n},$$

qu'on peut aussi écrire

$$(-1)^{n+\mu}\binom{n+\mu}{2\mu}(2\cos\alpha)^{2\mu}x^{2n};$$

d'où résulte

$$A_{2n}=(-1)^{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n}(-1)^{\mu}\binom{n+\mu}{2\mu}(2\cos\alpha)^{2\mu}.$$

Dans le second cas, on pose dans le terme général $\lambda+2p=2n+1$, $\lambda=2\mu+1$, et l'on trouve

$$A_{2n+1}=(-1)^{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n}(-1)^{\mu}\binom{n+\mu+1}{2\mu+1}(2\cos\alpha)^{2\mu+1}.$$

(N° 24.)

13. On a

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}},$$

$$\cos\frac{a}{4} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{a}{2n}};$$

et par suite,

$$P_n = \frac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}}\cdot\frac{\sin 2a}{2a}.$$

Donc

$$\lim P_n = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

La considération de cette limite s'est présentée à Viète (*Œuvres*, p. 400), à propos de la surface du cercle. Il a été conduit en effet à la relation

$$\frac{S_{2^n.k}}{S_k} = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{4}\cdots\cos\frac{A}{2^n}},$$

où $S_{2^n.k}$ désigne la surface du polygone régulier de $2^n.k$ côtés, et A l'angle au centre de ce polygone.

14. 1° On a évidemment

$$(1-u_{m+1})(1-u_{m+2}) > 1 - u_{m+1} - u_{m+2},$$

$$(1-u_{m+1})(1-u_{m+2})(1-u_{m+3}) > 1 - u_{m+1} - u_{m+2} - u_{m+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$A_p > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+p}).$$

Or, la série (1) étant convergente, on peut prendre m assez grand pour qu'on ait

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+p} < \alpha,$$

α étant aussi petit qu'on voudra.

De là résulte

$$A_p > 1 - \alpha.$$

2° On peut poser

$$1 + u_h = \frac{1}{1 - v_h};$$

d'où

$$v_h = \frac{u_h}{1 + u_h} < u_h;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{B_p} = (1 - v_{m+1})(1 - v_{m+2})\ldots(1 - v_{n+p})$$
$$> (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2})\ldots(1 - u_{m+p});$$

par suite,

$$B_p < \frac{1}{1 + \alpha}.$$

15. 1° A_n décroît à mesure que n augmente; il suffit donc d'établir que cette quantité ne décroît pas indéfiniment. Or, on a

$$A_n = (1 - u_0)(1 - u_1)\ldots(1 - u_m) \times (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2})\ldots(1 - u_n)$$
$$= A_m(1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2})\ldots(1 - u_n),$$

et, d'après le numéro précédent,

$$A_n > A_m(1 - \alpha),$$

α étant une quantité aussi petite qu'on veut pour m suffisamment grand.

2° On voit de même que

$$B_n = B_m(1 + u_{m+1})(1 + u_{m+2})\ldots(1 + u_n),$$

et comme, pour m suffisamment grand, le multiplicateur de B_m est moindre que $\frac{1}{1 - \alpha}$, on a

$$B_n < \frac{B_m}{1 - \alpha},$$

c'est-à-dire que B_n, qui croît sans cesse avec n, ne croît pas sans limite.

16. On voit sur-le-champ que B_n croît indéfiniment avec n, car on a

$$B_n > 1 + u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

et, par hypothèse, la quantité

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

croît indéfiniment avec n.

Quant à la limite de A_n, si l'on pose

$$\frac{1}{1 - u_h} = 1 + v_h,$$

d'où

$$v_h = \frac{u_h}{1 - u_h} > u_h,$$

on peut écrire

$$\frac{1}{A_n} = (1 + v_0)(1 + v_1)\ldots(1 + v_n) > (1 + u_0)(1 + u_1)\ldots(1 + u_n).$$

Il résulte de là que $\frac{1}{A_n}$ croît indéfiniment avec n, c'est-à-dire que A_n tend vers zéro.

17. On a les égalités suivantes :

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

$$\frac{(m-1)(m+2)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3},$$

. . . . ,

$$(-1)^{p-1}\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)}$$
$$+(-1)^p\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}$$
$$=(-1)^p\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}.$$

La valeur absolue du second membre de cette dernière égalité est celle du produit

$$(2)\qquad \left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{p}\right),$$

et tend vers zéro lorsque p croît indéfiniment, quel que soit le nombre positif m (n° 15).

Quand m est négatif, les égalités précédentes subsistent encore, et la somme des $p+1$ premiers termes de la série est représentée par l'expression (2), dans laquelle on remplace m par une quantité négative. On sait d'ailleurs (n° 16) que dans ce cas le produit (2) croît indéfiniment avec p.

18. 1° Soit S la limite de la série, S_{n+1} la somme de ses $n+1$ premiers termes; on peut écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} S_{n+1} = (1+u_1)\left(\dfrac{1+u_1+u_2}{1+u_1}\right)\left(\dfrac{1+u_1+u_2+u_3}{1+u_1+u_2}\right)\cdots \\ \qquad\times\left(\dfrac{1+u_1+u_2+\ldots+u_n}{1+u_1+\ldots+u_{n-1}}\right); \end{cases}$$

par suite,

$$S = (1+u_1)\left(1+\frac{u_2}{1+u_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{1+u_1+u_2}\right)\cdots \times\left(1+\frac{u_n}{1+u_1+\ldots+u_{n-1}}\right)\cdots,$$

c'est-à-dire que le produit

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n),$$

où

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_1+\ldots+u_{n-1}},$$

converge, pour n croissant indéfiniment, vers la même limite que la série proposée. On voit d'ailleurs que la condition de convergence du n° 15 est ici satisfaite.

2° Si l'on compare le produit

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)$$

au second membre de l'équation (1), on en conclut

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = \frac{u_2}{1+u_1}, \quad v_3 = \frac{u_3}{1+u_1+u_2},$$

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_1+\ldots+u_{n-1}};$$

par suite,

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = (1+v_1)v_2, \quad u_3 = (1+v_1)(1+v_2)v_3,$$

et généralement

$$u_n = (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_{n-1})v_n,$$

ce qui donne une série convergente comme le produit d'où on l'a tirée.

19. 1° Posons l'identité

$$(1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^nz) = 1 + A_1z + A_2z^2 + \ldots + A_nz^n.$$

Si l'on y remplace x par xz, l'identité subsiste encore, et il en résulte

$$(1 + A_1z + A_2z^2 + \ldots + A_nz^n)(1 + x^{n+1}z)$$
$$= 1 + A_1xz + A_2x^2z^2 + \ldots + A_nx^nz^n(1+xz).$$

Égalant les coefficients de z^p dans les deux membres, il vient

$$A_px^p + A_{p-1}x^p = A_p + A_{p-1}x^{n+1},$$

d'où

$$A_p = \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x^p} A_{p-1},$$

et, par suite,

$$A_p = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \cdot \frac{x^2 - x^{n+1}}{1-x^2} \cdots \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x^p}.$$

2° Si l'on fait croître n indéfiniment, A_p a pour limite

l'expression

$$\frac{x^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)} = B_p,$$

laquelle diffère de A_p d'aussi peu qu'on veut, quel que soit le nombre déterminé p, pour n suffisamment grand. On peut donc poser l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} B_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} A_\alpha z^\alpha + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif très-voisin de zéro. Observons, en outre, que le premier membre de cette équation tend vers une valeur déterminée quand p croît indéfiniment, puisque le rapport $\frac{B_{p+1}}{B_p}$ tend vers zéro dans le même cas. On a aussi, pour p suffisamment grand et quel que soit n, supposé toujours plus grand que p,

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} A_\alpha z^\alpha = \lim P_p + \delta,$$

δ étant aussi petit qu'on voudra. On conclut des relations (1) et (2)

$$\lim P_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} B_\alpha z^\alpha.$$

20. La formule de Moivre conduit à la relation connue

$$\sin mx = m \cos^{m-1} x \sin x - \binom{m}{3} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \ldots.$$

En y supposant m impair, elle prend la forme

$$(1) \qquad \sin mx = m \sin x (1 + a_1 \sin^2 x + \ldots + a_{m-1} \sin^{m-1} x)$$

ou celle-ci,

$$(2)\ \sin mx = m \cos^m x \tang x\,(1 + b_1 \tang^2 x + \ldots + b_{m-1} \tang^{m-1} x).$$

Or, si l'on pose

$$\sin x = y \quad \text{et} \quad \sin mx = \varphi(y),$$

l'équation

$$\varphi(y) = 0 = y\,(1 + a_1 y^2 + \ldots + a_{m-1} y^{m-1})$$

admet m racines, qui sont les sinus des arcs suivants :

$$0,\quad \pm\frac{\pi}{m},\quad \pm\frac{2\pi}{m},\quad \pm\frac{m-1}{2}\,\frac{\pi}{m};$$

par suite, la relation (1) peut s'écrire

$$\sin mx = \mathrm{H} \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}\right)$$

$$\times\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2}\cdot\frac{\pi}{m}}\right).$$

Pour déterminer H, il suffit de remarquer que si l'on fait $x = 0$, on a

$$\mathrm{H} = \lim \frac{\sin mx}{\sin x} = \lim \frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{x}{\sin x}\, m = m,$$

d'où résulte la relation (A).

On arriverait de la même manière à l'équation (B).

21. Les inégalités (C) peuvent s'écrire

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{\sin a} < \frac{h}{a},\qquad \frac{\tang(a+h) - \tang a}{\tang a} > \frac{h}{a},$$

ou bien

$$a \sin\frac{h}{2}\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) < \frac{h}{2}\sin a,$$

$$a \tang h\,(1 + \tang a \tang \overline{a+h}) > h \tang a;$$

et sous cette dernière forme elles sont évidentes, car on a

$$\sin\frac{h}{2} < \frac{h}{2}, \quad a\cos a < \sin a, \quad \tang h > h, \quad a(1+\tang^2 a) > \tang a.$$

Elles s'établissent aussi très-simplement par la Géométrie.

Cela posé, de l'identité

$$\sin mx = m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots$$
$$\times\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right),$$

on tire

$$(1)\qquad \sin z = m\sin\frac{z}{m}(1-u_1)(1-u_2)\ldots\left(1-u_{\frac{m-1}{2}}\right),$$

en faisant

$$mx = z, \qquad \frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2 n\frac{\pi}{m}} = u_n.$$

Supposons l'arc z compris entre les valeurs $n\pi$ et $(n+1)\pi$, n étant plus petit que m; on peut prendre m assez grand pour que $\frac{z}{m}$ soit moindre que $\frac{\pi}{2}$. Par suite, et en appliquant le premier lemme, on a

$$u_1 < \frac{z^2}{\pi^2}, \quad u_2 < \frac{z^2}{4\pi^2}, \ldots, \quad u_n < \frac{z^2}{n^2\pi^2},$$
$$u_{n+1} > \frac{z^2}{(n+1)\pi^2} \cdots u_{\frac{m-1}{2}} > \frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2};$$

d'où

$$(u_1-1)(u_2-1)\ldots(u_n-1)(1-u_{n+1})\ldots\left(1-u_{\frac{m-1}{2}}\right)$$

$$<\left(\frac{z^2}{\pi^2}-1\right)\left(\frac{z^2}{4\pi^2}-1\right)\cdots\left(\frac{z^2}{n^2\pi^2}-1\right)\left[1-\frac{z^2}{(n+1)^2z^2}\right]\cdots$$

$$\times\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right];$$

et enfin

$$(-1)^n\sin z<(-1)^n z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

$$\times\left[\frac{z^2}{1-\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Le second lemme conduirait de la même manière à la deuxième inégalité.

22. Le numéro précédent fournit les deux inégalités

$$(-1)^n\sin z<\mathrm{P},\quad (-1)^n\cos^m\frac{z}{m}>\mathrm{P},$$

où l'on a

$$\mathrm{P}=(-1)^n z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left[\frac{z^2}{1-\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right],$$

m représentant un nombre impair quelconque aussi grand qu'on voudra. Or, si l'on fait croître m indéfiniment, P a une limite (n° 15). D'ailleurs, la quantité variable $\cos^m\frac{z}{m}$, toujours moindre que l'unité, s'en approche indéfiniment, car on a

$$\cos^{2m}\frac{z}{m}=\left(1-\sin^2\frac{z}{m}\right)^m>1-m\sin^2\frac{z}{m},$$

ou

$$\cos^{2m}\frac{z}{m} > 1 - \frac{z^2}{m}\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\left(\frac{z}{m}\right)^2},$$

et le second membre de cette inégalité est aussi voisin qu'on veut de l'unité, pour m suffisamment grand. Il suit de là que $(-1)^n \sin z$ est compris entre deux quantités variables avec m et ayant la même limite; on en conclut donc

$$(-1)^n \sin z = \lim P,$$

ou

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Pour tirer de là $\cos z$, il suffit d'observer qu'on a

$$\sin 2z = 2z\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$\times\left[1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{4z^2}{(2n)^2\pi^2}\right]\cdots,$$
$$\sin z = z\left(1-\frac{4z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{4z^2}{(2n)^2\pi^2}\right]\cdots;$$

d'où, en divisant ces deux égalités membre à membre,

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4z^2}{\overline{2n-1}^2\,\pi^2}\right)\cdots.$$

23. Si l'on déduit des relations proposées l'expression de

$$\cos(x+nh)+i\sin(x+nh)=(\cos x+i\sin x)(\cos h+i\sin h)^n$$

on trouve, en posant, pour abréger, $2i\sin\frac{h}{2}=\alpha$,

$$\begin{aligned}
&\cos x + i\sin x + \binom{n}{1}\alpha\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)+i\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\\
&\quad+\binom{n}{2}\alpha^2\left[\cos\left(x+2\frac{h}{2}\right)+\sin\left(x+2\frac{h}{2}\right)\right]\\
&\quad+\binom{n}{3}\alpha^3\left[\cos\left(x+3\frac{h}{2}\right)+\sin\left(x+3\frac{h}{2}\right)\right]+\ldots\\
&=(\cos x+i\sin x)\left[1+\binom{n}{1}\alpha u+\binom{n}{2}\alpha^2u^2+\binom{n}{3}\alpha^3u^3+\ldots\right],
\end{aligned}$$

u désignant le binôme $\cos\frac{h}{2}+i\sin\frac{h}{2}$.

Il suit de là qu'on doit avoir l'égalité

$$(\cos h + i\sin h)^n = (1+\alpha u)^n,$$

ou bien

$$\cos h + i\sin h = 1 + 2i\sin\frac{h}{2}\left(\cos\frac{h}{2}+i\sin\frac{h}{2}\right),$$

relation qui est évidente.

24. Posons

$$u=\sum_{p=0}^{p=n} x^p\cos(a+p\alpha),\qquad v=\sum_{p=0}^{p=n} x^p\sin(a+p\alpha);$$

on tire de là

$$\begin{aligned}
u+iv&=\sum_{p=0}^{p=n} x^p(\cos a+i\sin a)(\cos p\alpha+i\sin p\alpha)\\
&=(\cos a+i\sin\alpha)\sum_{p=0}^{p=n}[x(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^p.
\end{aligned}$$

La dernière somme est celle des termes d'une progression

géométrique, et elle est égale à

$$\frac{x^{n+1}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} - 1}{x\cos\alpha + i\sin\alpha) - 1},$$

expression qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\left[x^{n+1}\left(\cos\overline{n+1}\,\alpha + i\sin\overline{n+1}\,\alpha\right) - 1\right](x\cos\alpha - 1 - xi\sin\alpha)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Le produit de cette quantité par $\cos a + i\sin a$ prend la forme $A + Bi$, où l'on a

$$A = \frac{x^{n+2}\cos(a + n\alpha) - x^{n+1}\cos\left(a + \overline{n+1}\,\alpha\right) - x\cos(a+\alpha) + \cos a}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = u,$$

$$B = \frac{x^{n+2}\sin(a + n\alpha) - x^{n+1}\sin\left(a + \overline{n+1}\,\alpha\right) + x\sin(a+\alpha) + \sin a}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = v.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, u et v n'ont de limite finie que lorsqu'on suppose $x < 1$. On a, dans ce cas,

$$\lim u = \frac{\cos a - x\cos(a+\alpha)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}, \quad \lim v = \frac{\sin a + x\sin(a+\alpha)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Remarque. — Le dernier résultat conduit à celui-ci :

$$\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = x\sin\alpha + \ldots + x^{2n}\sin 2n\alpha$$
$$+ x^{2n+1}\sin(2n+1)\alpha + \ldots.$$

En le rapprochant des formules trouvées dans le n° 12, on en déduit

$$\sin 2n\alpha = \sin\alpha\, A_{2n-1},$$

$$\sin(2n+1)\alpha = \sin\alpha\, A_{2n};$$

et par suite,

$$\sin 2n\alpha = (-1)^{n+1} \sin \alpha \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (-1)^{\mu} \binom{n+\mu}{2\mu+1} (2\cos\alpha)^{2\mu+1},$$

$$\sin(2n+1)\alpha = (-1)^{n} \sin \alpha \sum_{\mu=0}^{\mu=n} (-1)^{\mu} \binom{n+\mu}{2\mu} (2\cos\alpha)^{2\mu}.$$

§ II. — *Différentiation des fonctions explicites d'une seule variable.*

25. $\dfrac{dy}{dx} = 4x(20x^3 - 24x^2 + 9x - 2).$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-2}{(x-1)^4}.$

27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{40}{3} b^3 x^2 (a+bx)^{-\frac{1}{3}}.$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5}{2} b^4 x^3 (a+bx)^{-\frac{7}{2}}.$

30. En prenant les logarithmes des deux membres et différentiant ensuite, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^{\frac{7}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}(x^2-7x+1).$$

Il est souvent commode d'opérer comme dans cet exemple, lorsque la fonction est un produit de facteurs élevés à des puissances.

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{(x+2)^3}\left[\dfrac{(x+3)^7}{x+1}\right]^{\frac{1}{2}}.$

32. $\frac{dy}{dx} = (a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

33. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$.

35. Soit

$$y = \log_3 x = \log(\log_2 x),$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x \log_2 x};$$

et généralement

$$\frac{d(\log_n x)}{dx} = \frac{1}{x \log x \log_2 x \ldots \log_{n-1} x}.$$

36. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3}{(5x-4)^3}$.

37. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2(1+x)^4}$.

38. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\text{arc}\sin x}$.

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a + b\cos x}$.

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}$.

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}$.

43. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + b\cos x}$.

44. $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right).$

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}.$

46. Les trois parties dont l'expression se compose ont respectivement pour dérivées

$$\frac{x(1+4\sin^2 x)}{5\cos^6 x}, \quad \frac{4x(1+2\sin^2 x)}{15\cos^4 x}, \quad \frac{8x}{15\cos^2 x},$$

dont la somme se réduit à $\frac{x}{\cos^6 x}$.

47. $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos x\, e^{-\frac{a}{\sin x}}}{2\sin^2 x\left(1 - e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}.$$

48. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a + b\cos x + c\cos 2x}.$

49. La fonction x_n tend vers une limite finie, car en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les exposants de x dans $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$a_1 = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{q}\right), \quad a_2 = a_1\left(1 + \frac{1}{pq}\right),$$

$$a_3 = a_1 + \frac{a_2}{pq} = a_1\left(1 + \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q^2}\right),$$

$$a_n = a_1\left(1 + \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q^2} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}q^{n-1}}\right).$$

La limite de a_n étant $\frac{q+1}{pq-1}$, il en résulte que x_n tend vers $x^{\frac{q+1}{pq-1}}$, dont la dérivée s'obtient immédiatement.

50. Il suffit de différentier par rapport à x. On obtien-

drait de la même manière la relation (1), en partant de la relation (2).

51. Qu'on fasse $x = 0$ dans les relations du numéro précédent, puis qu'on y remplace h par x; en différentiant les résultats obtenus, on arrive aux formules à démontrer.

52. Il suffit de différentier deux fois de suite la relation qu'on trouve en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation donnée.

§ III. — *Différentiation des fonctions explicites de plusieurs variables.*

53. $du = 3(3x - 2y)^2(3dx - 2dy).$

54. $du = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}(ydx - xdy).$

55. $du = \dfrac{2(xdy - ydx)}{y(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

56. $du = \dfrac{2dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{1+y^2}.$

57. $du = \dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{1+y^2}.$

58. $du = \dfrac{2(ydx - xdy)}{y^2 \sin \dfrac{2x}{y}}.$

59. $du = a\,\dfrac{(ay - bz)\,dx + (cz - ax)\,dy + (bx - cy)\,dz}{(cz - ax)^2}.$

60. $du = \dfrac{ye^z dz}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{xe^z(xdy - ydx)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

61. $du = (dz - dy - dx)\sin(x + y - z).$

62. $du = y^x z^{y^x}\left(\log y \log z\, dx + \dfrac{x}{y}\log z\, dy + \dfrac{dz}{z}\right).$

63. $\frac{du}{dx} = 24yz, \quad \frac{du}{dy} = 24zx, \quad \frac{du}{dz} = 24xy, \quad u = 8xyz.$

64. De l'équation

$$F(X, Y, Z, T) = f(x, y, z, t),$$

on déduit par la différentiation

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dX} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dX} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dX} + \ldots + \frac{df}{dt}\frac{dz}{dX}, \\ \frac{dF}{dY} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dY} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dY} + \ldots + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dY}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dF}{dT} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dT} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dT} + \ldots + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dT}. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$X_1\frac{dx}{dX} + Y_1\frac{dx}{dY} + \ldots + T_1\frac{dx}{dT} = x_1,$$

puisque $\frac{dx}{dX}$ est égal au coefficient de X dans x, $\frac{dx}{dY}$ au coefficient de Y, etc. Si donc on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées respectivement par $X_1, Y_1, \ldots, T_1$, il vient

$$X_1\frac{dF}{dX} + Y_1\frac{dF}{dY} + \ldots + T_1\frac{dF}{dT} = x_1\frac{df}{dx} + y_1\frac{df}{dy} + \ldots + t_1\frac{df}{dt}.$$

Cette proposition est utile dans la théorie des coordonnées homogènes.

65. La fonction étant homogène de l'ordre n, chacune de ses dérivées partielles est homogène du degré $n-1$; il en résulte qu'on a

$$(n-1)\frac{du}{dx} = x\frac{d^2u}{dx^2} + y\frac{d^2u}{dx\,dy} + z\frac{d^2u}{dx\,dz},$$

$$(n-1)\frac{du}{dy} = x\frac{d^2u}{dx\,dy} + y\frac{d^2u}{dy^2} + z\frac{d^2u}{dy\,dz},$$

$$(n-1)\frac{du}{dz} = x\frac{d^2u}{dx\,dz} + y\frac{d^2u}{dy\,dz} + z\frac{d^2u}{dz^2}.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par x, la seconde par y, la troisième par z, on obtient la relation proposée.

66. $\dfrac{d^3 u}{dx\,dy\,dz} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$.

67. $\dfrac{d^2 u}{dx\,dy} = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dfrac{d^4 u}{dx^2 dy^2} = \dfrac{15\,xy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}}$.

68. $$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - xy\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - zx\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - yz\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En représentant par φ le second membre, on a

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{dx} = (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{dy} = (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{dz} = -u;$$

par suite,

$$(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz} = -\frac{du}{dz},$$

et enfin

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz} = -(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{dz}.$$

Observons qu'en posant

$$x = a \sin\alpha, \quad y = a \sin\beta, \quad z = a \cos\gamma,$$

l'équation (1) devient

$$u = a^2 \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{d\beta}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{d\gamma}{dz}\right)} = -\frac{\left(\frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)},$$

ce qui n'est autre chose que la relation (2).

69. Si l'on différentie successivement par rapport à x et par rapport à y les équations du système (2), en y considérant u et t comme des fonctions de ces variables en vertu des équations (1), on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 1 &= \varphi'_u F'_x + \varphi'_t f'_x, \\ 0 &= \varphi'_u F'_y + \varphi'_t f'_y, \\ 0 &= \psi'_u F'_x + \psi'_t f'_x, \\ 1 &= \psi'_u F'_y + \psi'_t f'_y. \end{aligned}\right.$$

Des relations (3) on tire, en posant

$$\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t = k,$$

$$k F'_x = -\psi'_t, \quad k F'_y = \varphi'_t, \quad k f'_x = \psi'_u, \quad k f'_y = -\varphi'_t,$$

d'où résulte immédiatement le théorème.

§ IV. — *Différentiation des fonctions implicites.*

70. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(a+y)(ax+by+xy)-x}{y-(b+x)(ax+by+xy)}.$

71. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y^2}{n(x^2-y^2)-2xy}.$

72. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}.$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - xy\log y}{x^2 - xy\log x} = \dfrac{y^2}{x^2}\,\dfrac{1-\log x}{1-\log y}.$

74. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{2-y}.$

75. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$

$$= \frac{\sin^2 y}{\sin y \sin 2y + \cos y - 1}.$$

76. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2y\sin y + y^2}{1-\cos y - y\sin y}.$

77. $\frac{dy}{dx}=\frac{ny}{1-y}(1-\cot nx)$.

78. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y\tang xy(\text{séc}\,xy)^{\frac{1}{2}}+2e^{x^y}yx^{y-1}}{x\tang xy(\text{séc}\,xy)^{\frac{1}{2}}+2e^{x^y}x^y\log x}$

$=\frac{y}{x}\frac{2x^{y-1}-\tang xy}{\tang xy-2x^{y-1}\log x}$.

79. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

Cet exemple rentre dans l'équation générale

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=a,$$

qui conduit au même résultat.

80. $\frac{dy}{dx}=3y\frac{y-x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2y^2-x^3)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

81. $\frac{dy}{dx}=\frac{y+2x+2x^3}{(1+x^2)(2y-\text{arc tang}\,x)}=\frac{y(y+2x+2x^3)}{(1+x^2)(y^2+x^2)}$.

82. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a}{y}-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{y^2}$.

83. $\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-2x^2z)}{4y(z-3)},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1-6x^2}{2(z-3)}$.

84. $\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z}$.

85. $\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left(\frac{y^2}{x}\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\frac{xz-1}{xz+1}-x\right)$.

86. On déduit de l'équation (1)

(3) $$D_y z=f(z)D_x z.$$

Le premier membre de l'équation (2) est égal à

$$\varphi'(z)D_y z\,D_x z+\varphi(z)D_x(D_y z),$$

ce qui revient à

$$\varphi'(z)f(z)(D_x z)^2 + \varphi(z)f'(z)(D_x z)^2 + \varphi(z)f(z)D_x^2 z,$$

résultat qu'on obtient également en développant le second membre.

On peut dire encore : quelle que soit la fonction z des deux variables x et y, on a identiquement

$$D_y[\varphi(z)D_x z] = D_x[\varphi(z)D_y z].$$

Or, pour la forme particulière de z que l'on considère, l'équation (3) subsiste; l'équation (2) subsiste donc aussi.

87. Considérant le cas général, on a (n° 86)

$$D_y F(z) = F'(z)D_y z = F'(z)f(z)D_x z;$$

donc

$$D_y^2 F(z) = D_y[F'(z)f(z)D_x z] = D_x[F'(z)(fz)^2 D_x z].$$

On aurait de même

$$D_y^3 F(z) = D_x^2[F'(z)(fz)^3 D_x z],$$

et enfin

$$D_y^n F(z) = D_x^{n-1}[F'(z)(fz)^n D_x z].$$

Cette formule est due à M. Duhamel : il en a fait usage pour établir très-simplement la série de Lagrange.

§ V. — *Dérivées d'ordre quelconque.*

88. $$\frac{d^n y}{dx^n} = (-b)^n p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)(a-bx)^{p-n}.$$

89. $$\frac{dy}{dx} = -a\sin ax = a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

et généralement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On trouverait de même

$$\frac{d^n . \sin ax}{dx^n} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

90. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$;

d'où

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2}\frac{d^n . \cos 2x}{dx^n} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On déduit de là

$$\frac{d^n . \sin^2 x}{dx^n} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$$

91. On sait comment, au moyen de la formule de Moivre, on exprime les puissances entières de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction des multiples de l'arc x. Les résultats auxquels on parvient peuvent s'écrire

$$(1) \qquad 2^{2p}\sin^{2p} x = (-1)^p \sum_{h=0}^{h=2p} (-1)^h \binom{2p}{h} \cos(2p - 2h)x,$$

$$(2) \qquad 2^{2p+1}\sin^{2p+1} x = (-1)^p \sum_{h=0}^{h=2p+1} (-1)^h \binom{2p+1}{h} \sin(2p+1-2h)x,$$

$$(3) \qquad 2^p \cos^p x = \sum_{h=0}^{h=p} \binom{p}{h} \cos(p - 2h)x.$$

La dernière formule donne, en ayant égard au n° 89,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2^p}\sum_0^p \binom{p}{h} (p-2h)^n \cos\left[(p-2h)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

Si la fonction proposée était $\sin^r x$, les relations (1) et (2) conduiraient à deux formules analogues, l'une répondant au cas de l'exposant pair, l'autre au cas de l'exposant impair.

92. $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\, x^{-n}.$

93. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1-x)^2},$

et, par suite,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2\,\frac{d^{n-1}.(1-x)^{-2}}{dx^{n-1}} = 2\,\frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(1-x)^{n+1}}.$$

94. $\frac{dy}{dx} = e^{x\cos\theta}[\cos(x\sin\theta)\cos\theta - \sin(x\cos\theta)\sin\theta]$

$$= e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + \theta);$$

et en continuant,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta).$$

95. On a identiquement

$$e^{ax}[\cos(bx+c) + i\sin(bx+c)] = e^{ax+i(bx-c)}.$$

Appelons u le premier membre de cette égalité, il vient

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a+bi)^n e^{ax+i(bx+c)}.$$

Posons

$$\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin\alpha;$$

la dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [\cos(n\alpha + i \sin n\alpha)] \times [\cos(bx + c) + i \sin(bx + c)] e^{ax}.$$

Si l'on remplace maintenant u par sa valeur et qu'on identifie les parties réelles dans les deux membres, ainsi que les parties imaginaires, on trouvera

$$\frac{d^n [e^{ax} \cos(bx + c)]}{dx^n} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx + c + n\alpha),$$

$$\frac{d^n [e^{ax} \sin(bx + c)]}{dx^n} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\alpha).$$

96. Si l'on désigne par u et v deux fonctions de x, on a, d'après un théorème connu de Leibnitz,

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = v \frac{d^n u}{dx^n} + n \frac{dv}{dx} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \text{etc.}$$

Appliquant ici cette formule, on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x \frac{d^n (a + bx)^{\frac{p}{2}}}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} (a + bx)^{\frac{p}{2}}}{dx^{n-1}},$$

et en vertu du n° 88,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} p(p-2)\ldots(p-2n+4) \times \left[na + \left(\frac{p}{2} + 1\right) bx\right] (a + b)^{\frac{p}{2} - n}.$$

97. En appliquant le théorème rappelé dans le numéro précédent, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \text{A} \left[1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{p}{p - n + 1} \frac{x}{1 - x} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{p(p-1)}{(p-n+1)(p-n+2)} \frac{x^2}{(1-x)^2} - \ldots\right],$$

en posant

$$A = p(p-1)\dots(p-n+1)(1-x)^p x^{p-n}.$$

Si $n=p$, l'expression devient

$$1.2.3\dots(p-1)p\left\{(1-x)^p - \left(\frac{p}{1}\right)^2(1-x)^{p-1}x + \left[\frac{p(p-1)}{1.2}\right]^2(1-x)^{p-2}x^2 - \dots\right\}.$$

98. Au moyen du théorème du n° 96, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\left[\log x + \frac{n}{1}\frac{1}{p-n+1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(p-n+1)(p-n+2)} + \dots\right],$$

en posant

$$A = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n}.$$

Si $n=p$, l'expression devient

$$p(p-1)\dots 3.2.1\left[\log x + \frac{p}{1^2} - \frac{p(p-1)}{(1.2)^2} + \frac{p(p-1)(p-2).1.2}{(1.2.3)^2} - \dots\right].$$

99. $y=(a+x)^p.(b+x)^{-q}$;

d'où (n° 96)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\left[1 - \frac{n}{1}\frac{q}{p-n+1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{(p-n+1)(p-n+2)}y^2 + \dots\right],$$

en posant

$$A = p(p-1)\dots(p-n+1)\frac{(a+x)^{p-n}}{(b+x)^q}.$$

100. $y = (e^{ax}\cos bx).x^p$.

En posant

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\alpha,$$

et ayant égard aux nos 95 et 96, on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$\times\left[x^p\cos(bx+n\alpha) + npx^{p-1}\frac{\cos[bx+(n+1)\alpha]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}p(p-1)x^{p-2}$$

$$\left.\times\frac{\cos[bx+(n-2)\alpha]}{(a^2+b^2)^{\frac{2}{2}}}+\ldots\right].$$

En opérant sur l'expression $x^p e^{a+bi}$, on obtiendrait à la fois le résultat précédent et celui qui convient au cas où sin bx remplacerait cos bx dans la formule considérée.

101. $y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bx}+\frac{1}{a+bx}\right)$;

par suite,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots nb^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{(a+bx)^{n+1}}\right].$$

Si n est pair, on peut écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots nb^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\sum_0^{\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2h}a^{n-2h}b^{2h}x^{2h},$$

et si n est impair, on a la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n b^{n+1}}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} \binom{n+1}{2h+1} a^{n-2h-1} b^{2h} x^{2h+1}.$$

102. $y = \dfrac{1}{2b}\left[\dfrac{1}{a - bx} - \dfrac{1}{a + bx}\right].$

En opérant comme au numéro précédent, on trouve, pour n pair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_0^{\frac{n}{2}} \binom{n+1}{2h+1} a^{n-2h} b^{2h} x^{2h+1},$$

et pour n impair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.n b^{n-1}}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} \binom{n+1}{2h} a^{n-2h+1} b^{2h} x^{2h}.$$

103. On obtiendra les formules demandées en remplaçant b par ib dans celles du n° 101 ; mais on arrive à des résultats plus simples en posant

$$\frac{1}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a - ibx} + \frac{1}{a + ibx}\right],$$

d'où

$$\frac{d^n y}{dx^n} = i^n \frac{1.2\ldots n b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a - ibx)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(a + ibx)^{n+1}}\right].$$

Si l'on fait $a = r\cos\varphi$, $bx = r\sin\varphi$, le second membre devient

$$i^n \frac{1.2.3\ldots n b^n}{2a(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Big[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi + (-1)^n \cos(n+1)\varphi - (-1)^n i \sin(n+1)\varphi\Big].$$

Il en résulte, pour n pair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.2\ldots nb^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{bx}{a}\right];$$

et pour n impair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1.2\ldots nb^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{bx}{a}\right].$$

On peut aussi obtenir une formule unique pour les deux cas; en posant en effet

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{bx-ai} - \frac{1}{bx+ai}\right),$$

et opérant à peu près comme tout à l'heure, on trouve, quel que soit n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots nb^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{bx}\right].$$

(Liouville.)

104. En remplaçant b par ib on rentre dans la question traitée n° 102; on obtient d'ailleurs des formules plus simples en opérant comme au n° 103.

105. $\frac{dy}{dx} = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$.

La question est ramenée à celle du n° 101.

106. $\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

Appliquant ici le théorème du n° 96, et observant qu'on a (n° 88)

$$\frac{d^p(a+bx)^{-\frac{1}{2}}}{dx^p} = (-)1^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p(a+bx)^{\frac{2p+1}{2}}} b^p,$$

il vient

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$\times\left[1+\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}\right.$$

$$\left.\times\frac{1.3\ldots(2k-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right].$$

107. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2}$;

par suite (n° 103)

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-2)(n-1)\,\frac{\sin n\varphi\sin^n\varphi}{a^n},$$

où l'on a

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2}-\varphi.$$

108. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\sin\alpha}{(1-px)(1-qx)}$,

en posant

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = p, \quad \cos\alpha - i\sin\alpha = q.$$

On tire de là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2i}\left(\frac{p}{1-px}-\frac{q}{1-qx}\right),$$

et par suite

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{2i}\left[p\,\frac{d^{n-1}(1-px)^{-1}}{dx^{n-1}} - q\,\frac{d^{n-1}(1-qx)^{-1}}{dx^{n-1}}\right],$$

ou bien (n° 88)

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2i}\,\frac{p^n(1-qx)^n-q^n(1-px)^n}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^n}.$$

Si l'on fait

$$1 - x\cos\alpha = \rho\cos\theta, \quad x\sin\alpha = \rho\sin\theta,$$

l'expression

$$p^n(1-qx)^n - q^n(1-px)^n$$

se réduit à

$$2i\sin n(\alpha+\theta).\rho^n,$$

et par conséquent,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\ldots(n-1)\frac{\sin n(\alpha+\theta)}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

109. Premier cas, m pair. La méthode de décomposition des fractions rationnelles nous donne ici :

$$\frac{1}{x^m - a^m} = \frac{1}{ma^{m-1}}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a}\right)$$

$$+ \frac{1}{ma^{m-1}}\sum_1^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} + i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} - ia\sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+ \frac{1}{ma^{m-1}}\sum_1^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} - i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} + ia\sin\frac{2h\pi}{m}}.$$

Posons

$$\cos(\varphi_h) = \frac{x - a\cos\frac{2h\pi}{m}}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin(\varphi_h) = \frac{a\sin\frac{2h\pi}{m}}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

il vient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{ma^{m-1}} \left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right]$$
$$+ (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{\frac{1}{2} ma^{m-1}} \sum_1^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos\left[\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Deuxième cas, m impair. On obtient encore, au moyen de la décomposition des fractions rationnelles en fractions plus simples,

$$\frac{1}{x^m - a^m} = \frac{1}{ma^{m-1}} \frac{1}{x-a}$$
$$+ \frac{1}{ma^{m-1}} \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} + i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} - ia\sin\frac{2h\pi}{m}}$$
$$+ \frac{1}{ma^{m-1}} \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} - i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} + ia\sin\frac{2h\pi}{m}}.$$

En faisant une hypothèse semblable à celle du premier cas, il vient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{ma^{m-1}} \frac{1}{(x-a)^{n+1}}$$
$$+ (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{\frac{1}{2} ma^{m-1}} \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\left[\frac{2h\pi}{m} + (n-1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

110. En opérant à peu près de la même manière que dans le numéro précédent, et adoptant les mêmes nota-

tions, on trouve pour m pair

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{ma^{m-p-1}}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - (-1)^p \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

$$+ (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{\frac{1}{2} ma^{m-p-1}} \sum_1^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos\left[\frac{2h(p+1)\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{\frac{n+1}{2}}};$$

et pour m impair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{ma^{m-p-1}} \frac{1}{(x-a)^{n+1}}$$

$$+ (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{\frac{1}{2} ma^{m-p-1}} \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\left[\frac{2h(p+1)\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

111. $e^{c(x+h)^2} = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots$

$$= e^{cx^2}.e^{2cxh}.e^{ch^2}.$$

Or on a

$$e^{2cxh} = 1 + 2cxh + \frac{(2cx)^2}{1.2}h^2 + \ldots,$$

$$e^{ch^2} = 1 + ch^2 + \frac{c^2}{1.2}h^4 + \ldots.$$

Multiplions ces deux dernières égalités membre à membre et prenons le coefficient de h^n; il est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left[c^n(2x)^n + n(n-1)c^{n-1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}c^{n-2}(2x)^{n-4} + \ldots\right];$$

$\frac{d^n y}{dx^n}$ s'obtiendra donc en multipliant cette quantité par

$$1.2.3\ldots n e^{cx^2}.$$

La méthode que nous venons d'employer peut s'appliquer dans plusieurs autres cas.

112. $\cos(x^2) + i\sin(x^2) = e^{ix^2}$;

par conséquent, en vertu du numéro précédent,

$$\frac{d^n.\cos(x^2)}{dx^n} + i\frac{d^n.\sin(x^2)}{dx^n}$$

$$= e^{ix^2}\Big[i^n(2x)^n + i^{n-1}.n(n-1)(2x)^{n-2} + i^{(n-2)}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} + \ldots\Big].$$

Remplaçons les puissances de i par des exponentielles, au moyen de la relation $i^p = e^{ip\frac{\pi}{2}}$; le second membre de l'équation précédente pourra s'écrire

$$(2x)^n e^{i\left(x^2+\frac{n\pi}{2}\right)} + n(n-1)(2x)^{n-2}e^{i\left(x^2+\frac{n-1}{2}\pi\right)} + \ldots.$$

On déduit de là

$$\frac{d^n.\cos(x^2)}{dx^n} = (2x)^n\cos\left(x^2 + n\frac{\pi}{2}\right) + n(n-1)(2x)^{n-2}\cos\left(x^2+\frac{n-1}{2}\pi\right) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} \times\cos\left(x^2+\frac{n-2}{2}\pi\right) + \ldots.$$

Il suffit de remplacer les cosinus par des sinus pour obtenir $\frac{d^n\sin(x^2)}{dx^n}$.

113. Après avoir différentié un petit nombre de fois, on s'aperçoit aisément que la dérivée $n^{ième}$ de y est de la forme

$$\frac{a_n e^{nx} + a_{n-1} e^{(n-1)x} + \ldots + a_1 e^x}{(e^x+1)^{n+1}};$$

on peut donc poser

$$(1)\quad (e^x+1)^{n+1}\frac{d^n y}{dx^n} = a_n e^{nx} + a_{n-1} e^{(n-1)x} + \ldots + a_1 e^x.$$

D'un autre côté, x ne recevant que des valeurs positives, on a la série convergente

$$y = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \ldots;$$

d'où, en la différentiant n fois, ce qui donne encore un résultat convergent,

$$(2)\quad \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n(1^n e^{-x} - 2^n e^{-2x} + 3^n e^{-3x} - \ldots).$$

On a aussi

$$(3)\quad (e^x+1)^{n+1} = e^{(n+1)x} + \frac{n+1}{1} e^{nx} + \frac{(n+1)n}{1.2} e^{(n-1)x} + \ldots.$$

Multipliant les équations (2) et (3) membre à membre et observant qu'en vertu de la relation (1) le produit ne doit renfermer qu'un nombre fini de termes à exposants positifs, d'où résulte que les termes affectés d'exposants négatifs se détruisent mutuellement, il vient

$$(e^x+1)^{n+1}\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$= (-1)^n\left\{1^n e^{nx} - \left(2^n - \frac{n+1}{1}1^n\right)e^{(n-1)x} + \left[3^n - \frac{n+1}{1}2^n + \frac{(n+1)n}{1.2}1^n\right]e^{(n-2)x} + \ldots\right\}.$$

(LAPLACE.)

114. La relation est évidente quand $n = 1$. Afin de l'établir généralement, prouvons que si elle existe pour le nombre n, elle existe aussi pour le nombre $n+1$. Or on a, en différentiant les deux membres de l'équation (1),

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & v D^{n+1} u + D v D^n u = D^{n+1}.uv - \binom{n}{1} D^n (u D v) \\ & \qquad + \binom{n}{2} D^{n-1}(u D^2 v) + \ldots + (-1)^n D (u D^n v). \end{aligned} \right.$$

Si d'ailleurs on remplace dans (1) v par Dv, on trouve

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & D v D^n u = D^n (u D v) - \binom{n}{1} D^{n-1} (u D^2 v) \\ & \qquad + \binom{n}{2} D^{n-2}(u D^3 v) + \ldots + (-1)^n u D^{n+1} v. \end{aligned} \right.$$

Retranchant membre à membre la relation (3) de la relation (2), il vient

$$\begin{aligned} v D^{n+1} u = D^{n+1}.uv & - \binom{n+1}{1} D^n (u D v) \\ & + \binom{n+1}{2} D^{n-1}(u D^2 v) + \ldots + (-1)^{n+1} u D^{n+1} v. \end{aligned}$$

C. Q. F. T.

115. Observant qu'on a

$$D_x^n . e^{ax} = a^n e^{ax},$$

et appliquant la formule de Leibnitz (n° 96), on trouve

$$\begin{aligned} D^n [e^{ax} \varphi(x)] = e^{ax} \Big[& a^n \varphi(x) + \binom{n}{1} a^{n-1} D.\varphi(x) + \ldots \\ & + \binom{p}{n} a^{n-p} D^p.\varphi x + \ldots + D^n.\varphi(x) \Big], \end{aligned}$$

résultat qu'on peut présenter sous la forme *symbolique*

$$D^n e^{ax} \varphi(x) = e^{ax} (a + D)^n \varphi x.$$

116. 1° On a

$$D_t(x^n D_x^n y) = D_x(x^n D_x^n y) D_t x = [n x^{n-1} D_x^n y + x^n D_x^{n+1} y] x,$$

et par suite,

(1) $$(D_t - n)(x^n D_x^n y) = x^{n+1} D_x^{n+1} y.$$

Si $n = 1$, il vient

$$(D_t - 1) x D_x y = x^2 D_x^2 y.$$

Or

$$D_x y = D_t y . D_t x,$$

d'où

$$D_t y = x D_x y;$$

donc

(2) $$x^2 D_x^2 y = (D_t - 1) D_t y.$$

Pour $n = 2$, l'équation (1) donne

$$(D_t - 2) x^2 D_x^2 y = x^3 D_x^3 y,$$

et, d'après ce qui précède,

$$x^3 D_x^3 y = (D_t - 2)(D_t - 1) D_t y,$$

et ainsi de suite.

117. Cette relation se vérifie immédiatement par le calcul pour les premières valeurs de n. Afin de l'établir généralement, supposons-la démontrée pour une valeur n quelconque et cherchons à reconnaître qu'elle subsiste pour la valeur $n + 1$. En différentiant les deux membres, on obtient dans le second, pour le coefficient de $f^{(n+1-k)}(x^2)$, l'expression

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots k}(2x)^{n-2k+1}$$
$$+ 2.\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+3)}{1.2\ldots(k-1)}(n-2k+2)(2x)^{n-2k+1},$$

ce qui revient à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+2)}{1.2\ldots k}\left(\overline{n-2k+1}+2k\right)$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2k+2)}{1.2\ldots k}.$$

La loi de composition des termes du second membre de la relation proposée subsiste donc encore quand on y change n en $n+1$. La formule est donc générale.

118. En vertu du numéro précédent, le terme général du développement de $\frac{d^{n-1}f(x^2)}{dx^{n-1}}$ est égal à

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2k)}{1.2\ldots k}(2x)^{n-2k-1}f^{(n-k-1)}(x^2).$$

On a ici

$$f(x^2)=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

et par suite,

$$f^{(n-k-1)}(x^2)=(-1)^{n-k-1}\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{2k+3}{2}(1-x^2)^{\frac{2k+1}{2}}.$$

Pour faire apparaître le produit

$$1.3.5\ldots(2n-1)=\mathrm{P},$$

qui figure dans le second membre de la relation proposée, observons qu'on a

$$\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-3)}{2}\ldots\frac{(2k+3)}{2}$$
$$=\frac{2^{k-n-1}\mathrm{P}}{1.3.5\ldots(2k+1)}$$
$$=\frac{2^{k-n-1}\mathrm{P}.2.4.6\ldots 2k}{1.2.3\ldots 2k(2k+1)}$$
$$=\frac{2^{2k-n-1}\mathrm{P}}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(2k+1)}.$$

On aura donc, pour le terme général du développement qu'il s'agit de former,

$$(-1)^{n-k-1}\frac{\mathrm{P}}{(k+1)(k+2)\ldots(2k+1)}$$
$$\times\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2k)}{1.2\ldots k}x^{n-2k-1}(1-x^2)^{\frac{2k+1}{2}},$$

ou bien

$$(-1)^{n-k-1}\frac{\mathrm{P}}{n}\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\alpha\sin^{2k+1}\alpha.$$

Ce résultat, rapproché de la formule connue (n° 20),

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots$$
$$+(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\alpha\sin^{2k-1}\alpha + \ldots + \ldots$$

démontre immédiatement la relation proposée.

Cette importante relation, attribuée ordinairement à Jacobi qui l'a donnée en 1826 dans le *Journal de Crelle*, appartient en réalité à Olinde Rodrigues (*Thèse sur l'attraction des sphéroïdes*, 1815). M. Hermite en a présenté récemment une généralisation très-remarquable (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mars 1865).

119. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et par suite,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

En différentiant cette équation $(n-1)$ fois, il vient

$$(1-x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-(2n-1)x\frac{d^ny}{dx^n}-(n-1)^2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=0.$$

On déduit de là, pour $x=0$,

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0-(n-1)^2\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=0,$$

c'est-à-dire $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0=0$, quand n est pair, et

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0=2.2^2.4^2.6^2\ldots(n-1)^2,$$

quand n est impair.

120. On a

$$\frac{dy}{dx}=-\mu\frac{\sin(\mu\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mu x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\mu\arcsin x)-\frac{\mu^2}{(1-x^2)^2}\cos(\mu\arcsin x);$$

et par suite,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+\mu^2y=0.$$

En différentiant n fois cette équation, il vient

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-(n^2-\mu^2)\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

On déduit de là, pour $x=0$,

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0-(n^2-\mu^2)\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=0.$$

Ce résultat montre que toutes les dérivées de y sont nulles quand n est impair, et qu'on a, pour les valeurs paires

de n,

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0 = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)\ldots(\mu^2 - n^2).$$

On trouve de la même manière

$$\left(\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}\right)_0 = 0,$$

quand n est pair, et

$$\left(\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}\right)_0 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)\ldots(\mu^2 - n^2),$$

quand n est impair.

§ VI. — *Développement des fonctions en séries.*

121. 1° Il suffit de poser $h = -x$ dans la formule (1) pour avoir la formule (2) où θ_1 représente un nombre compris entre 0 et 1.

2° Soit fait

$$f(x) = F(h - x),$$

d'où

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n F^n(h - x).$$

L'équation (2) peut alors s'écrire

$$F(h - x) = F(h) - xF'(h - x) - \ldots$$
$$- \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(h - x) - \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n+1}(h - \theta_1 x),$$

ou bien, en posant $h - x = z$,

$$F(z + x) = F(z) + xF'(z) + \ldots$$
$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(z) + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} F^{(n)}(z + \theta x),$$

résultat qui ne diffère pas de la relation (1).

122. On pose, dans la série de Taylor,

$$x + h = \frac{x}{1+x}.$$

123. Différentiant les deux équations proposées, on trouve

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)(b_1+2b_2x+\ldots+nb_nx^{n-1}+\ldots)$$
$$= a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots.$$

En égalant les multiplicateurs de x^{n-1} dans les deux membres de cette égalité, il vient

$$na_n = b_1a_{n-1} + 2b_2a_{n-2} + \ldots + nb_na_0.$$

124. Comme on a

$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x,$$

il en résulte

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{3^{2n}+3}{4} x^{2n} + \ldots.$$

125. En posant

$$e^{h\cos x}\cos(h\sin x) = f(h),$$

on reconnaît (n° 94) que la série de Maclaurin est applicable à cette fonction, le reste de la série tendant vers zéro quel que soit h, à mesure que le nombre des termes augmente indéfiniment. On a donc

$$e^{h\cos x}\cos(h\sin x) = 1 + \frac{h}{1}\cos x + \frac{h^2}{1.2}\cos 2x + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}\cos nx + \ldots.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à h, on déduit du résultat

$$e^{h\cos x}\sin(h\sin x)\sin x = h(\cos^2 x - \cos 2x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[\cos nx\cos x - \cos\overline{n+1}\,x\right] + \ldots,$$

d'où,

$$e^{h\cos x}\sin(h\sin x) = h\sin x + \frac{h^2}{1.2}\sin 2x + \frac{h^3}{1.2.3}\sin 3x + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}\sin nx + \ldots.$$

126. On vérifie aisément (n° 115) que le reste de la série de Taylor, dans le cas de arc tang $(x+h)$, tend vers o à mesure que n augmente indéfiniment, pour toutes les valeurs de x dont la valeur absolue est inférieure à l'unité.

On a donc le développement

$$\text{arc tang}(x+h) = \text{arc tang}\, x + h\sin^2\varphi$$
$$- \frac{h^2}{2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi - \ldots - \frac{h^n}{n}\sin^n\varphi\sin n\varphi - \ldots$$

où

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \text{arc tang}\, x.$$

En faisant $h = -x$, on trouve la série.

127. On a

$$y = \log(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \log\left[1 + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Pour $x < 1$, $\log(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ se développe d'après la série de Maclaurin, et $\log\left[1 + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$ en série ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de la quantité $\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Ces développements demeurent convergents quand on prend tous les termes avec le même signe, et il en est de même pour le développement en série ordonnée par rapport à x d'une puissance entière positive quelconque de $\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$; donc (n° 11)

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots;$$

Les quantités A_n se déterminent simplement par la méthode des coefficients indéterminés. On a en effet

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2 x + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or,

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^p \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} x^{2p} + \ldots;$$

la quantité A_n est donc nulle toutes les fois que n est pair, et, pour $n = 2p+1$, on a

$$A_{2p+1} = (-1)^p \frac{1.3\ldots(2p-1)}{1.2\ldots 2p} \frac{1}{2p+1};$$

par suite,

$$\log\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \ldots$$

Ce résultat reproduit le développement de arc sin z quand on remplace x par iz.

128. On a

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n(m+n)} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{m+n}\right);$$

or,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n} = \log\frac{1}{1-x},$$

et

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{m+n}}{m+n} = \log\frac{1}{1-x} - \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m}\right).$$

Par conséquent,

$$y = \frac{(1-x^m)\log(1-x)}{mx^m} + \frac{1}{mx^m}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m}\right).$$

Cette équation subsiste même pour $x = 1$ (n° 1).

129. La série connue qui représente arc sin x est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1 et $+1$, et pour ces limites mêmes, abstraction faite du signe des termes du développement; il en résulte que la fonction (arc sin $x)^2$ se représente aussi par une série convergente dans les mêmes conditions. On a donc, d'après le n° 119,

$$(\text{arc}\sin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2\,x^4}{3.2} + \frac{2.4.}{3.5.}\frac{x^6}{3} + \ldots \\ + \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots.$$

On arrive au même résultat en employant la méthode des coefficients indéterminés.

Il est clair qu'une puissance quelconque entière et positive de arc sin x donnerait aussi lieu à une série convergente pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas en dehors des limites -1 et $+1$.

130. En différentiant l'équation du n° 129, il vient

$$\frac{\text{arc}\sin x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-1} + \ldots,$$

relation qui suppose x compris entre les limites -1 et $+1$.

Soit fait

$$x = \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où résulte

$$\text{arc}\sin x = \text{arc tang}\, z,$$

et par suite

$$\text{arc tang}\, z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2\right].$$

De cette équation et de la relation connue

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{3},$$

on déduit la suivante, commode pour le calcul de π :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots\right].$$

131. Soit

$$y = \text{tang}\,x = \sin x\,(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on a $\sin x < 1$ ou $x < \frac{\pi}{2}$, tang x est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de $\sin x$, et la convergence de la série ne cesserait pas d'exister si tous les termes étaient pris positivement. Comme il en est de même du développement en série d'une puissance entière et positive quelconque de $\sin x$ (n° 11), on peut donc poser, en remarquant que tang x est une fonction impaire,

$$\text{tang}\,x = x + T_3\frac{x^3}{1.2.3} + T_5\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$
$$+ T_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots$$

Pour trouver la loi qui lie les coefficients, différentions $(2n+1)$ fois les deux membres de l'équation

$$y\cos x = \sin x,$$

ce qui donne

$$\cos x . y^{(2n+1)} + (2n+1)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) y^{(2n)} + \ldots$$
$$+ \binom{2n+1}{2p} \cos(x + p\pi) y^{(2n-1-2p)} \ldots$$
$$= \sin\left(x + \frac{2n+1}{2}\pi\right).$$

Faisant $x = 0$ dans ce résultat, on en tire

$$T_{2n+1} - \binom{2n+1}{2} T_{2n-1} + \ldots$$
$$+ \binom{2n+1}{2p} (-1)^p T_{2n-1-2p} + \ldots = (-1)^n.$$

En suivant une marche tout à fait semblable, on trouverait

$$\text{séc}\, x = 1 + T_2 \frac{x^2}{1.2} + T_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots T_{2n} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots$$

avec la relation

$$T_{2n} - \binom{2n}{2} T_{2n-2} + \ldots + (-1)^p \binom{2n}{2p} T_{2n-2p} + \ldots = 0.$$

132. On a

$$y = 1 - \frac{\mu^2 (\arcsin x)^2}{1.2} + \frac{\mu^4 (\arcsin x)^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

et cette série demeure convergente quand on y prend tous les termes avec le signe +. D'un autre côté, $2p$ désignant un nombre entier positif, on a (n° 129)

$$(\arcsin x)^{2p} = x^{2p} + a_2 x^{2p+2} + a_4 x^{2p+4} + \ldots,$$

les coefficients $a_2, a_4, \ldots$ étant tous positifs et la série convergente. Il suit de là que le théorème du n° 11 est ici applicable et que la fonction y se développe en une série de la

forme

$$y = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots$$

Les coefficients de ce développement devant être identiques à ceux que fournit la série de Maclaurin, il en résulte (nº 120)

$$y = 1 - \frac{\mu^2}{1.2} x^2 + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)\ldots(\mu^2 - \overline{2n-2}^2)}{1.2.3\ldots 2n} x^{2n} + \ldots$$

Une marche tout à fait semblable donnerait

$$z = \frac{\mu}{1} x - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)\ldots(\mu^2 - \overline{2n-1}^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)} x^{2n+1} + \ldots$$

Ces remarquables formules sont dues à Euler.

133. Comme on a

$$y = \frac{x}{\sin x}\cos x, \quad \frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^4 x}{5} + \ldots,$$

il en résulte (nº 11) que la fonction paire y peut se développer en série convergente de la forme

$$(a) \quad y = 1 + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + a_{2n} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

du moins pour les valeurs de x qui ne surpassent pas $\frac{\pi}{2}$.

Pour calculer $a_{2n} = \left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)_0$, différentions $2n+1$ fois l'équation

$$y \sin x = x \cos x;$$

il vient

$$\sin\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)y+(2n+1)\sin(x+n\pi)y'+\ldots$$
$$+\binom{2n+1}{2p}\sin\left(x+\frac{2n-2p+1}{2}\pi\right)y^{(2p)}+\ldots$$
$$+(2n+1)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)y^{(2n)}+\sin x.y^{(2n+1)}$$
$$=x\cos\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)+(2n+1)\cos(x+n\pi),$$

d'où l'on tire, en faisant $x=0$,

$$1-\binom{2n+1}{2}a_2+\ldots+(-1)^p\binom{2n+1}{2p}a_{2p}+\ldots$$
$$+(-1)^n(2n+1)a_{2n}=(2n+1).$$

C. Q. F. T.

134. Si l'on pose

$$y=x\cot x,\quad z=x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

la question revient à démontrer que l'on a

$$\text{(A)}\qquad \left(\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}}\right)_0=(-1)^n\left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)_0.$$

On déterminera les coefficients relatifs au développement de la fonction paire désignée par z, en différentiant $2n+1$ fois les deux membres de l'équation

$$(e^x-e^{-x})z=x(e^x+e^{-x}),$$

ce qui donne

$$(e^x-e^{-x})z+(2n+1)((e^x+e^{-x})z'+\ldots$$
$$+\binom{2n+1}{p}(e^x+e^{-x})z^{(2p)}+\ldots+(e^x-e^{-x})z^{(2n+1)}$$
$$=x(e^x-e^{-x})+(2n+1)(e^x+e^{-x}),$$

et d'où l'on tire, pour $x = 0$,

$$1 + \binom{2n+1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \binom{2n+1}{2p}\left(\frac{d^{2p}z}{dx^{2p}}\right)_0 + \ldots$$
$$+ (2n+1)\left(\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}}\right)_0 = (2n+1).$$

En rapprochant ce résultat de celui du numéro précédent, on en conclut la relation (A), ce qui démontre la proposition énoncée.

On aurait pu la déduire aussi de la relation

$$x \cot x = ix \frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}.$$

Les nombres B_n sont appelés *nombres de Bernoulli*, du nom de Jacques Bernoulli qui les a le premier introduits dans l'Analyse (*Ars conjectandi*). Euler s'en est occupé souvent; il a montré que ces nombres jouent un grand rôle dans plusieurs questions, notamment dans la sommation des séries. Les dix-sept premiers ont été calculés par lui, d'après une formule qui permet d'obtenir l'un d'eux quand on connaît tous ceux qui le précèdent (*Calcul différentiel*, IIe partie). Laplace a donné l'expression générale de chacun d'eux, indépendamment des autres (LACROIX, t. III).

Voici les valeurs des huit premiers nombres de Bernoulli :

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$
$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}.$$

135. Les formules du n° 22 fournissent les suivantes :

$$\log(\sin^2 x) = \log(x^2) + \log\left[\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)^2\right] + \ldots$$
$$+ \log\left[\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^2\right] + \ldots,$$

et

$$\log(\cos^2 x) = \log\left[\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \log\left\{\left[1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right]^2\right\} + \ldots,$$

d'où l'on tire par la différentiation

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \ldots - \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} - \ldots,$$

$$\tang x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 - x^2} + \ldots$$
$$+ \frac{2x}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 - x^2} + \ldots,$$

et ces formules se ramènent immédiatement aux relations (1).

136. On a la relation

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \ldots + \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) + \ldots,$$

or

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = -\frac{x^2}{n^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{x^6}{n^6\pi^6} + \ldots.$$

Par conséquent, en vertu du n° **11**,

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right)\frac{x^2}{\pi^2}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots\right)\frac{x^4}{\pi^4}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour $\log\cos x$, on trouverait semblablement

$$\log\cos x = -\frac{2^2 T_2 x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{2^4 T_4 x^4}{\pi^4} - \ldots - \frac{1}{n}\frac{2^{2n} T_{2n} x^{2n}}{\pi^{2n}} - \ldots,$$

en posant

$$T_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots;$$

mais on a évidemment

$$S_p - T_p = \frac{1}{2^p} S_p;$$

par suite,

$$T_p = \frac{2^p - 1}{2^p} S_p,$$

ce qui conduit à l'équation (2).

137. Il suffit de différentier les équations (1) et (2) du numéro précédent pour obtenir les formules (A); les formules (B) se déduisent de ces dernières au moyen de la relation

$$B_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n},$$

qu'on trouve en rapprochant la première des formules (A) de l'équation du nº **134**.

138. Cette relation est une conséquence de la formule coséc $x = \tang \frac{x}{2} + \cot x$, et des relations (B) du numéro précédent.

139. La quantité

$$\left(1 + \frac{z}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{z}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{z}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

a une limite déterminée, quelle que soit la valeur finie attribuée à z (nº **15**). Soit y cette limite, on a

$$y = \left(1 + \frac{z}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{z}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{z}{n^2\pi^2}\right)(1 + \varepsilon),$$

ε étant aussi petit qu'on voudra pour n suffisamment grand. Il en résulte qu'on peut écrire

$$y = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots.$$

Pour déterminer A_n, observons que la relation

$$\left(1+\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{9\pi^2}\right)\ldots = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

ayant lieu quel que soit z, si l'on fait $z = -x^2$ et qu'on multiplie les deux membres par x, il vient (n° 22)

$$\sin x = x - A_1 x^3 + A_2 x^5 - A_3 x^7 + \ldots + (-1)^n A_n x^{2n+1} + \ldots,$$

d'où

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

et, par suite,

$$y = 1 + \frac{z}{1.2.3} + \frac{z^2}{1.2.3.5} + \ldots$$
$$= \left(1+\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

Si l'on remplace maintenant z par x^2 dans ce dernier résultat, et qu'on multiplie les deux membres par x, on obtient la relation

$$x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.5} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On trouverait d'une manière analogue

$$v = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ces résultats démontrent que les formules du n° 22 subsistent encore quand on y remplace x par ix.

§ VII. — *Changement de variables.*

140. $\frac{d^2x}{dy^2} + x - e^y = 0.$

141. $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)};$

or

$$e^t = x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$\frac{dy}{dt} + y = a(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}).$$

142. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a - 1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

143. $\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$

144. On trouve, en recourant aux imaginaires,

$$x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = i \tang \frac{t}{i},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cos^2\frac{t}{i}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cos^4\frac{t}{i}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{i}\tang\frac{t}{i}\,\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2ay}{1 - i\tang\frac{t}{i}} = \frac{d^2y}{dt^2} + ay(e^{2t} + 1) = 0.$$

145. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t};$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$$

146. $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$

147. La relation (2) permet d'exprimer x en fonction de y et donne

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(x - y) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tang} y = \mu \operatorname{tang} y,$$

en faisant $\frac{1-k}{1+k} = \mu.$

On tire de là

$$dx = (1+\mu)\frac{\cos^2 y + \mu \sin^2 y}{\cos^2 y + \mu^2 \sin^2 y}dy.$$

Pour calculer $\sin x$, on met l'équation (3) sous la forme

$$x = y + \operatorname{arc tang}(\mu \operatorname{tang} y),$$

d'où l'on déduit

$$\sin x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + \mu^2 \operatorname{tang}^2 y}} + \frac{\cos y \cdot \mu \operatorname{tang} y}{\sqrt{1 + \mu^2 \operatorname{tang}^2 y}};$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = (1+\mu)\frac{dy}{\sqrt{1 - (1-\mu^2)\sin^2 y}}.$$

La substitution (2) employée ici est appelée *substitution de Landen*, du nom du géomètre anglais qui l'a fait connaître. Elle joue un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques.

148. $dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta,$
$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta;$

d'où

$$x dy - y dx = r^2 d\theta,$$
$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2;$$

et, par suite,

$$\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{r^2}{\left(r^2+\dfrac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

149. $$1=\frac{dr}{dx}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dx},$$

$$0=\frac{dr}{dx}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dx};$$

donc

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\cos\theta-\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\sin\theta+\frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

On déduit de là

$$x\frac{du}{dy}-y\frac{du}{dy}=\frac{du}{d\theta}.$$

Cette transformation s'emploie dans la théorie des planètes.

150. $$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\frac{x}{r},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right);$$

on aurait de même

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right);$$

et, par suite,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0.$$

Cette équation se rencontre dans l'étude du mouvement des fluides.

151. $$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0.$$

152. $$\frac{du}{dy} = \sin\theta \frac{du}{dr} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{du}{d\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \sin^2\theta \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{du}{dr},$$
$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{d^2u}{dr\,d\theta} - \frac{du}{d\theta}\right).$$

Pour avoir $\frac{d^2u}{dx^2}$, il suffit de changer dans l'équation précédente y en x et θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, ce qui donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \cos^2\theta \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{du}{dr}$$
$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{d^2u}{dr\,d\theta} - \frac{du}{d\theta}\right);$$

on tire de là

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

153. Désignons par s une inconnue auxiliaire telle, qu'on ait

$$s = r\sin\theta;$$

il en résulte

$$y = s\sin\varphi, \quad z = s\cos\varphi,$$
$$s = r\sin\theta, \quad x = r\cos\theta.$$

En ne considérant d'abord que les deux variables y et z, il vient, comme dans le numéro qui précède,

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{s^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{du}{ds}.$$

Nous trouverons de la même manière

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}.$$

La première équation du dernier numéro donne encore

$$(3) \qquad \frac{1}{s}\frac{du}{ds} = \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}.$$

En ajoutant membre à membre les équations (1), (2) et (3), il vient enfin

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{s^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta} = 0.$$

Remplaçant s par sa valeur, on trouve

$$r\frac{d^2(ru)}{dr^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0.$$

Cette équation, due à Laplace, est d'une très-haute importance dans la théorie de l'attraction et dans plusieurs questions de physique.

§ VIII. — *Élimination des constantes et des fonctions.*

154. On trouve

$$axy\frac{dy^2}{dx^2} + (bx^2 - ay^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - bxy = 0.$$

155. On a les équations

$$\begin{aligned} a dx + b dy + c dz &= 0,\\ a d^2x + b d^2y + c d^2z &= 0,\\ a d^3x + b d^3y + c d^3z &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières donnent

$$\frac{a}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{b}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{c}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

et par suite, au moyen de la troisième,

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,d^3y + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^3z = 0.$$

Cette équation exprime la condition pour qu'une courbe soit plane ou que l'angle de torsion soit nul en chacun de ses points (n° 278).

156. Posons, pour abréger,

$$\sqrt{1 - e^2\sin^2 a} = \cos b;$$

il en résulte

$$(2) \qquad \sin^2 b = e^2 \sin^2 a.$$

Différentiant l'équation (1), on en déduit

$$(3) \qquad \cos b = \frac{\cos x \sin y\,dy + \sin x \cos y\,dx}{\sin x \cos y\,dy + \cos x \sin y\,dx},$$

et par suite,

$$\cos a = \frac{\sin x \cos x\,dy + \sin y \cos y\,dx}{\sin x \cos y\,dy + \cos x \sin y\,dx}.$$

On trouve de plus

$$\sin^2 b = \frac{(dy^2 - dx^2)(\cos^2 y - \cos^2 x)}{(\sin x \cos y\,dy + \cos x \sin y\,dx)^2},$$

$$\sin^2 a = \frac{(\sin^2 x\,dy^2 - \sin^2 y\,dx^2)(\cos^2 y - \cos^2 x)}{(\sin x \cos y\,dy + \cos x \sin y\,dx)^2}.$$

Substituant dans l'équation (2) et réduisant, on obtient l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dy}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 y}} \pm \frac{dx}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 x}} = 0.$$

Il est facile de reconnaître qu'il faut prendre le signe + dans cette équation, lorsqu'on suppose $\cos b > 0$. Portons

en effet dans l'équation (3), à la place de $\frac{dy}{dx}$, la valeur

$$-\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 y}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}};$$

il vient, après une transformation évidente,

$$\cos b = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 y}\sqrt{1-e^2\sin^2 x} - e^2\sin x \sin y \cos x \cos y}{1-e^2\sin^2 x \sin^2 y}.$$

Or le numérateur sera positif, si l'on a

$$(1-e^2\sin^2 y)(1-e^2\sin^2 x) > e^4\sin^2 x \sin^2 y \cos^2 x \cos^2 y,$$

ou bien

$$e^4\sin^2 x \sin^2 y(1-\cos^2 x \cos^2 y) - e^2(\sin^2 x + \sin^2 y) + 1 > 0;$$

et cette inégalité a réellement lieu, car le premier membre peut s'écrire

$$(1-e^2\sin^2 x \sin^2 y)[1-e^2(1-\cos^2 x \cos^2 y)],$$

résultat nécessairement positif, puisqu'on a $e<1$. On verrait que le signe — dans l'équation (4) convient au cas où l'on suppose $\cos b < 0$.

Les équations (1) et (4) établissent une propriété importante des fonctions elliptiques de première espèce.

157. On trouve, par la différentiation,

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{n-2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{n+1}}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dz}{dy} = x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + ny^{n-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^n}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

et, par suite,

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = nz,$$

résultat facile à prévoir, puisque z est une fonction homogène de degré n.

On pourrait d'ailleurs observer tout d'abord que les deux fonctions se réduisent à une, car on a

$$z = x^n\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = x^n f\left(\frac{y}{x}\right).$$

158. Le second membre étant homogène du degré n, on a sur-le-champ

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = nu.$$

159. On trouve, en différentiant successivement par rapport à x et à y,

$$\frac{dz}{dx}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \varphi(z),$$

$$\frac{dz}{dy}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(z);$$

et, par suite,

(1) $$\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} = f(z),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Posons, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx} = p,\quad \frac{dz}{dy} = q,\quad \frac{dp}{dx} = r,\quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s,\quad \frac{dq}{dy} = t.$$

Il viendra, en éliminant f de l'équation (1),

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0;$$

c'est l'équation générale des surfaces réglées dont la génératrice rencontre constamment deux courbes données, en restant parallèle à un plan fixe.

160. L'équation proposée peut s'écrire

$$\log z = \log \varphi (ay + bx) + \log \psi (ay - bx),$$

ou bien

$$\log z = F(ay + bx) + f(ay - bx),$$

F et f désignant deux fonctions arbitraires.

On en déduit, en adoptant les notations du numéro précédent,

$$\frac{p}{z} = bF'(ay + bx) - bf'(ay - bx),$$

$$\frac{q}{z} = aF'(ay + bx) + af'(ay - bx),$$

$$\frac{zr - p^2}{z^2} = b^2 F''(ay + bx) + b^2 f''(ay - bx),$$

$$\frac{zt - q^2}{z^2} = a^2 F''(ay + bx) + a^2 f''(ay - bx).$$

Les deux dernières équations nous donnent

$$a^2(zr - p^2) - b^2(zt - q^2) = 0.$$

161. On trouve, en différentiant,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dr}{dx} = \left(a + c\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(ax + cz) = a\psi'(ax - by),$$

$$\frac{dr}{dy} = -b\psi'(ax - by),$$

$$\frac{dr}{dz} = c\varphi'(ax + cz);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{a}\frac{dr}{dx} + \frac{1}{b}\frac{dr}{dy} = 0$$

et

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx}+\frac{1}{b}\frac{du}{dy}=\frac{du}{dz}\left(\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{b}\frac{dz}{dy}\right).$$

On a d'ailleurs les deux équations

$$\left(a+c\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(ax+cz)=a\psi'(ax-by),$$

$$c\frac{dz}{dy}\varphi'(ax+cz)=-b\psi'(ax-by),$$

qui donnent

$$\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{b}\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{c},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx}+\frac{1}{b}\frac{du}{dy}+\frac{1}{c}\frac{du}{dz}=0.$$

162. En différentiant l'équation successivement par rapport à x et à y, on arrive aux relations

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+\psi(y)}\right)u,$$

$$\frac{du}{dy}=\left(\frac{\psi''(y)}{\psi'(x)}-2\frac{\psi'(y)}{\varphi(x)+\psi(y)}\right)u.$$

Une seconde différentiation conduit à

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\left[\frac{\varphi''(x)\psi''(y)}{\varphi'(x)\psi'(y)}-\frac{2}{\varphi x+\psi y}\times\left(\frac{\varphi'(x)\psi''(y)}{\psi'(x)}-\frac{\varphi''(x)\psi'(y)}{\varphi'(x)}\right)+6u\right]u.$$

La comparaison de ces résultats suggère l'idée de former le produit $\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}$, à l'aide duquel on trouve

$$u\frac{d^2u}{dx\,dy}-\frac{du}{du}\frac{du}{dy}=2u^3.$$

Le premier membre de cette équation peut s'écrire

$$u^2 \frac{d\left[\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}\right]}{dy} = u^2 \frac{\;,\;^2}{dx\,dy}.$$

On a donc

$$\frac{d^2 \cdot \log u}{dx\,dy} = 2u.$$

Cette équation joue un rôle important dans l'étude des surfaces.

(*Géométrie analytique* de MONGE, édition Liouville.)

§ IX. — *Vraie valeur des expressions qui se présentent sous des formes indéterminées.*

163. $-a^n$.

164. $\frac{n(n+1)}{2}$. La fonction proposée est égale à la somme

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

165. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. La fonction proposée est égale à la somme

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x^n.$$

166. $\frac{20}{9a}$.

167. $\frac{1}{24a}$.

168. $\frac{\pi^2}{6}$. La fonction proposée est la somme de la série

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \ldots.$$

(*Questions diverses.*)

169. $\frac{\pi^2}{8}$. La fonction proposée est la somme de la série

$$\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\frac{1}{5^2+x^2}+\dots$$

(*Questions diverses.*)

170. La fonction proposée revient à

$$\frac{\pi x}{\operatorname{tang}\pi x}\cdot\frac{\operatorname{tang}\pi x-\pi x}{2\pi x^3};$$

$\frac{\pi^2}{6}$ est la vraie valeur du second facteur et, par conséquent, de la fonction elle-même.

On serait arrivé au même résultat en faisant usage du développement de $\operatorname{tang}\pi x$ en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de l'arc.

171. La vraie valeur est celle de

$$\frac{p\cos^2 x\operatorname{tang}x}{\cos^2 px\operatorname{tang}px}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2px}{\sin 2px};$$

c'est l'unité.

172. Zéro pour n positif, $-\infty$ pour n négatif.

173. $\log x^{x^n}=x^n\log x$.

Donc, en vertu du numéro précédent, la vraie valeur cherchée sera 1 ou zéro, selon que n sera positif ou négatif.

174. $\frac{1}{6}$.

175. -3.

176. $\sin a$.

177. Le logarithme de l'expression proposée a pour vraie valeur celle de la quantité

$$-\frac{a}{2b}\frac{\sin ax}{\cos ax\cos bx\sin bx}=-\frac{a^2}{2b^2\cos ax\cos bx}\frac{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)}{\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)}.$$

La quantité cherchée est donc

$$e^{-\frac{a^2}{2b^2}}.$$

178. $\dfrac{1+a^2}{\cos^2 a}$.

179. $\dfrac{a-b}{g-h}$.

180. La vraie valeur est 1.

181. Le calcul se simplifie en mettant l'expression sous la forme

$$e^{\sin x}\,\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x};$$

on est conduit à la recherche de la vraie valeur de $\dfrac{e^u-1}{u}$ pour $u=0$, laquelle est l'unité.

182. L'expression se ramène à

$$\frac{z-\log(1+z)}{z^2},$$

en posant $x=\dfrac{1}{z}$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{2}$.

183. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

184. $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{5}{(24)^{\frac{1}{2}}}$, pour $x=0$.

La courbe représentée par l'équation proposée est connue sous le nom de *courbe du diable*.

185. $\dfrac{dy}{dx}=\infty$, pour $x=0$.

§ X. — *Maxima et minima.*

186. Pour $x = 1$, y est minimum.
Pour $x = 2$, y est maximum.
Pour $x = 3$, y est minimum.

187. En égalant la dérivée à zéro, on trouve

$$4x^3 - 753x^2 + 40340x + 566400 = 0,$$

dont les racines approchées à moins de 0,01 sont

$$+22{,}06, \quad +61{,}03, \quad +105{,}15,$$

et les valeurs correspondantes de y,

$$-62{,}8, \quad +63{,}2, \quad -116{,}2.$$

La considération de la dérivée seconde apprend que la deuxième valeur est un maximum, et que les autres sont des minima.

188. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0, \quad x = \pm 1.$

Pour reconnaître les maxima et les minima, il suffit de considérer seulement la fonction $1 - x^2$, parce que le facteur $\frac{1}{(1 + x^2)^2}$ restera toujours positif et sa dérivée ne deviendra pas infinie; or

$$\frac{d(1 - x^2)}{dx} = -2x;$$

donc $x = 1$ répond au maximum, $x = -1$ au minimum.

La remarque faite sur cet exemple simplifie souvent les calculs qui servent à distinguer les maxima et les minima.

189. En opérant comme dans le numéro qui précède, on trouve immédiatement que y est maximum pour $x = 0$ et minimum pour $x = 2$.

190. Pour $x=0$, $y=\frac{27}{4}$, minimum.

Pour $x=-2$, $y=\infty$.

191. Pour $x=\frac{a}{2^{\frac{1}{2}}}$, $y^2=\frac{4}{27a^4}$, maximum.

Ce calcul résout la question suivante : un point lumineux, situé sur une verticale donnée, éclaire une surface horizontale infiniment petite dont la position est connue; à quelle hauteur doit être placé le point lumineux pour que l'éclairement de la surface soit le plus grand possible?

192. Pour $x=e$, $y=\frac{1}{ne}$, maximum.

193. Posant $z=x^{\frac{1}{3}}$, et ne tenant compte dans la dérivée que du facteur

$$z(z-1)(z^3-7),$$

on trouve :

Pour $x=0$, minimum;
Pour $x=1$, maximum;
Pour $x=7$, minimum.

194. Pour $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$, maximum;

Pour $x=1$, $y=-1$, ni maximum ni minimum.

195. Pour $x=2^{\frac{1}{3}}a$, $y=4^{\frac{1}{3}}a$, maximum;

Pour $x=0$, $y=0$, minimum.

196. Ni maximum ni minimum.

197. Pour $x=\frac{ma}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}$, $y=\frac{a}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}$, maximum.

198. Pour $x = 0$ et $y = 0$, $u = 0$, maximum.

Pour $x = \pm 2^{\frac{1}{3}}$ et $y = \mp 2^{\frac{1}{3}}$, $u = -8$, minimum.

199. Pour $x = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{a}{3}$, $u = \frac{a^6}{433}$, maximum.

Pour $x = 0$ et $y = 0$, $u = 0$, ni maximum ni minimum.

200. Quand u sera maximum, $\log u$ le sera aussi, et réciproquement. Prenant les logarithmes de deux membres et égalant à zéro les dérivées partielles du second, on trouve

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b} = \pm \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Adoptons le signe + et posons

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n},$$

il en résulte

$$x = na, \quad y = n^2 a, \quad z = n^3 a.$$

Calculons les dérivées secondes et remplaçons-y les inconnues par ces valeurs; les conditions de maximum ou de minimum pour les fonctions de trois variables indépendantes se réduisent à

$$-\frac{3}{a^4 n^6 (1+n)^4} < 0, \quad \frac{8}{a^8 n^{10} (1+n)^4} > 0,$$

et la fonction u a pour maximum

$$\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^4}.$$

Le signe — donnerait un minimum.

201. Adoptons la méthode des multiplicateurs, et soit λ

celui de l'équation donnée. On a

$$(1) \qquad \lambda[(1+p^2)x+pqy]+rx+sy=0,$$

$$(2) \qquad \lambda[pqx+(1+q^2)y]+sx+ty=0.$$

Multiplions (1) par x, (2) par y, et ajoutons, il vient

$$\lambda+u=0,$$

ce qui donne

$$[u(1+p^2)-r]x=-(upq-s)y,$$

$$[u(1+q^2)-t]y=-(upq-s)x;$$

et, par suite,

$$u^2(1+p^2+q^2)-u[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]+rt-s^2=0.$$

C'est l'équation qui résout la question proposée.

La même équation se rencontre quand on cherche les rayons de courbure maximum et minimum en un point d'une surface.

202. En remarquant que $\sin 2y=\cos 2x$, on trouve

$$u=\frac{1}{2}\left(a\pm(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Le signe + correspond à un maximum, le signe — à un minimum.

203. Par la méthode des multiplicateurs on trouve

$$u=\frac{[\log(\mathrm{A}abc)]^3}{\log a^3\log b^3\log c^3}.$$

204. (*Fig.* 1.) Soient A et B les deux points, Ox la ligne droite, O l'origine, a et b les coordonnées de A; a_1, b_1 celles de B, et OP $=x$; on trouve que la condition du minimum est

$$\frac{x-a}{[b^2+(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{a_1-x}{[b_1^2+(x-a_1)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire que les angles APM, BPN sont égaux.

Nous avons supposé les points et la droite dans le même plan; la question se traite absolument de même quand cette condition n'a pas lieu.

205. $2a$ étant l'arc donné, x le rayon cherché, la condition du maximum est

$$\cos\frac{a}{x}\left(a\cos\frac{a}{x} - x\sin\frac{a}{x}\right) = 0.$$

On en tire $x = \frac{2a}{\pi}$, c'est-à-dire que le segment est un demi-cercle. Les valeurs de l'angle $\frac{a}{x}$ supérieures à π ne peuvent convenir.

Le second facteur donne

$$\frac{\tang\frac{a}{x}}{\left(\frac{a}{x}\right)} = 1,$$

ce qui exige

$$x = \infty;$$

il en résulte

$$y = 0,$$

qui est un minimum.

206. (*Fig.* 2.) $AC = a$, $AB = b$, $AX = x$.

Le minimum correspond à

$$x = \frac{b}{2^{\frac{1}{3}}}.$$

207. (*Fig.* 3.) $POM = \alpha$, $OP = \varphi$, $OM = \theta$.

La condition du maximum est

$$d\varphi - d\theta = 0;$$

d'ailleurs,

$$\tang\theta = \cos\alpha \tang\varphi.$$

Il en résulte que

$$\tang \varphi = (\text{séc}\, \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

donne le maximum.

208. Soient r, r' les rayons des sphères, a la distance des centres, x la distance du point cherché au centre de la sphère de rayon r; on a

$$x = a \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + r'^{\frac{3}{2}}}.$$

On suppose que le point demandé est situé entre les deux centres.

209. (*Fig.* 4.) Soient S le sommet de la pyramide additionnelle, PQRS une de ses faces prolongée jusque dans l'intérieur du prisme. On abaisse SO perpendiculaire sur la base, et l'on mène OM, RP, SQ, qui se rencontrent au point N. Il résulte de cette construction que les pyramides PSRO et PMRO sont égales, de sorte que le volume dont on s'occupe est indépendant de l'inclinaison de SQ sur OM. La valeur minimum cherchée correspond à

$$\sin \text{SNO} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}.$$

Les alvéoles des abeilles ont précisément la forme qui résulte de cette solution.

210. (*Fig.* 5.) Faisons

$$\text{BC} = a, \quad \text{AC} = b, \quad \text{BN} = x;$$

il vient

$$\text{DN} = \frac{b}{a} x, \quad \text{EN} = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

et la surface a pour expression

$$\frac{4}{3}\frac{b}{a}x(ax-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

dont le maximum répond à $x=\frac{3a}{4}$.

211. (*Fig.* 6.) Si l'on pose $AC=a$, $CD=b$, $CN=x$, BP représentant le grand axe de l'ellipse, la condition du maximum est donnée par l'équation

$$3(a^2+b^2)x^2-4b(a^2-b^2)x+b^2(a^2+b^2)=0.$$

Les racines seront réelles si l'on a

$$a>b\left(2+3^{\frac{1}{2}}\right),$$

c'est-à-dire lorsque l'angle du cône aura moins de 30 degrés.

Si les racines ne sont pas réelles, il n'y a pas de maximum, et la surface de l'ellipse augmente à mesure que son plan se rapproche de la base.

On aurait pu traiter le problème en prenant pour inconnue l'angle φ que fait le plan sécant avec le plan de la base. En désignant par 2α l'angle du cône, la condition du maximum est alors donnée par l'équation très-simple

$$\sin 2\varphi = 2\sin 2\alpha,$$

qui conduit au résultat déjà obtenu.

212. Soient S la surface totale d'un secteur appartenant à une sphère dont le rayon est x, y la hauteur de la zone qui lui sert de base, $\frac{4}{3}\varpi a^3$ le volume donné; on a les équations

$$y=\frac{2a^3}{x^2},\quad S=\frac{2\varpi a^3}{x}\left[2+\left(\frac{x^3}{a^3}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Posant

$$\frac{S}{2\varpi a^2} = u, \quad \frac{a}{x} = z,$$

il s'agit de déterminer les valeurs de z qui rendent maximum ou minimum la fonction

$$u = \frac{2 + (z^3 - 1)^{\frac{1}{2}}}{z}.$$

On trouve

$$u' = \frac{z^3 - 4(z^3 - 1)^{\frac{1}{2}} + 2}{2z^2(z^3 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où les deux solutions

$$z^3 = 10, \quad z^3 = 2.$$

On a donc les deux systèmes de valeurs

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\,10^{\frac{1}{3}}, \\ y = \dfrac{a}{5}\,10^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a\,2^{\frac{1}{3}}, \\ y = a\,2^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

La dérivée seconde apprend que le premier répond à un minimum et l'autre à un maximum.

213. Soient x le rayon du fond du vase, y celui de l'ouverture, z la hauteur, α l'angle de cette hauteur avec l'arête, et $\frac{\varpi a^3}{3}$ le volume donné; on trouve

$$(1) \qquad \begin{aligned} y^3 - x^3 &= a^3 \tan\alpha, \\ u^2 \sin\alpha &= y^2 - x^2(1 - \sin\alpha), \end{aligned}$$

en désignant par ϖu^2 la surface dont on cherche le mini-

mum. On déduit de là

$$y\,dy - x\,dx(1 - \sin\alpha) = 0,$$
$$y^2 dy - x^2 dx = 0,$$

d'où résulte l'équation

$$\frac{x^2}{y} - x(1 - \sin\alpha) = 0,$$

satisfaite par $x = 0$, et aussi par $x = (1 - \sin\alpha)y$. Négligeant la première solution qui répond à un cône, on tire de la seconde, combinée avec l'équation (1),

$$y = \frac{a}{\sqrt[3]{\cos\alpha(3 - 3\sin\alpha + \sin^2\alpha)}},$$

et par suite x et ϖu^2.

Le résultat obtenu répond bien à un minimum, la surface du vase pouvant croître indéfiniment.

214. Soient O le centre du cercle, R le rayon, α l'angle que fait MP avec le diamètre mené par le point P; si l'on pose

$$OP = a, \quad MP = x,$$

on a, pour l'expression u de l'éclairement reçu par la surface,

$$u = \frac{k \sin\alpha}{x^2}.$$

D'ailleurs,

$$r^2 = x^2 + a^2 + 2ax\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{u^2}{k^2} = \frac{4a^2x^2 - (r^2 - a^2 - x^2)^2}{4a^2x^6}.$$

En égalant à zéro la dérivée du second membre, il vient

$$x^4 - 4x^2(a^2 + r^2) + 3(r^2 - a^2)^2 = 0.$$

Cette équation fournit les valeurs

$$x^2 = 2(a^2 + r^2) - \sqrt{(a^2 + r^2)^2 + 12a^2r^2},$$
$$x^2 = 2(a^2 + r^2) + \sqrt{(a^2 + r^2)^2 + 12a^2r^2},$$

dont la dernière est à rejeter, parce qu'elle conduit à l'inégalité $x > a + r$. La première répond à un maximum, car deux minimums ont lieu aux extrémités du diamètre qui passe par le point P.

215. Soit fait

$$\text{AP} = a, \quad \text{YAX} = \theta, \quad \text{MA} = x, \quad \text{MP} = y, \quad \text{MPA} = \alpha;$$

l'éclairement u sera exprimé par la formule

$$u = \frac{k \sin\alpha}{y^2},$$

k désignant une constante.

Or,

$$y = \frac{a \sin\theta}{\sin(\theta + \alpha)};$$

d'où

$$u = \frac{k \sin\alpha \sin^2(\theta + \alpha)}{a^2 \sin^2\theta}.$$

On trouve

$$\frac{du}{d\theta} = \sin(\theta + \alpha)[3\sin(\theta + 2\alpha) - \sin\theta] = 0.$$

Un minimum évident répond à la solution

$$\sin(\theta + \alpha) = 0,$$

et l'on a pour le maximum cherché

$$\sin(\theta + 2\alpha) = \frac{1}{3}\sin\theta,$$

formule facile à construire.

216. En prenant des axes rectangulaires et supposant

les deux points situés sur l'axe des x, à la même distance a de l'origine, on a les équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mathrm{R}^2,$$
$$\overline{\mathrm{A}m}^2=u^2=y^2+(x-a)^2,$$
$$\overline{\mathrm{B}m}^2=v^2=y^2+(x-a)^2,$$

dont la première exprime qu'un point m du plan appartient au cercle de rayon R ayant son centre au point (α, β).

La question conduit à poser

$$du+dv=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{y\,dy+(x-a)\,dx}{u}+\frac{y\,dy+(x+a)\,dx}{v}=0,$$

avec

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0.$$

On en déduit

$$\frac{u}{v}=\frac{a(y-\beta)-[(y-\beta)x-y(x-\alpha)]}{a(y-\beta)+[(y-\beta)x-y(x-\alpha)]},$$

ou bien

$$\frac{u}{v}=\frac{a-k}{a+k},$$

en faisant

$$x-\frac{y(x-\alpha)}{y-\beta}=k.$$

Or, cette quantité k n'est autre que la distance de l'origine au point P où l'axe des x est rencontré par la droite qui joint le centre du cercle au point m. La dernière relation revient donc à celle-ci :

$$\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{B}m}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}},$$

d'où il résulte que la droite mP est bissectrice de l'angle AmB, et que, par suite, le point cherché est le point de contact de la circonférence et d'une ellipse tangente au cercle, ayant pour foyers les deux points donnés.

Le problème se traite facilement par la Géométrie; il suffit d'exprimer qu'en passant du point m à un point m' infiniment voisin sur la circonférence, la différence $Am'B - AmB$ est infiniment petite d'ordre supérieur au premier.

217. L'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et $2x$, $2y$, $2z$ étant les arêtes du parallélipipède, on a

$$x = \frac{a}{3^{\frac{1}{2}}}, \quad y = \frac{b}{3^{\frac{1}{2}}}, \quad z = \frac{c}{3^{\frac{1}{2}}};$$

et pour le volume cherché,

$$\frac{8abc}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

218. (*Fig.* 7.) ABC est le triangle donné, DEF le triangle inscrit.

$$CD = x, \quad AE = y, \quad BF = z.$$

On trouve

$$\frac{x - (b - y)\cos C}{[x^2 + (b - y)^2 - 2x(b - y)\cos C]^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a - x) - z\cos B}{[z^2 + (a - x)^2 - 2z(a - x)\cos B]^{\frac{1}{2}}},$$

et deux autres équations analogues; ce qui prouve qu'on a

$$\text{FEA} = \text{DEC}, \quad \text{EDC} = \text{BDF}, \quad \text{BFD} = \text{AFE}.$$

Le triangle demandé s'obtient donc en joignant entre eux les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés.

219. $lx + my + nz = 0$ étant l'équation du plan donné, r la distance du centre de la surface à un point de la section, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$r^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$
$$0 = lx + my + nz.$$

Soient λ et μ deux multiplicateurs indéterminés; la méthode connue donne

$$x + \lambda l = \mu a^2 x, \quad y + \lambda m = \mu b^2 y, \quad z + \lambda n = \mu c^2 z.$$

On tire de là

$$\mu = \frac{1}{r^2},$$

et par suite,

$$x = \frac{\lambda l r^2}{r^2 - a^2}, \quad y = \frac{\lambda m r^2}{r^2 - b^2}, \quad z = \frac{\lambda n r^2}{r^2 - c^2}.$$

On trouve enfin, pour obtenir le maximum et le minimum de r, l'équation suivante :

$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0;$$

elle sert à déterminer les vitesses de l'onde propagée dans un milieu cristallisé. La surface considérée dans cet exemple est la *surface d'élasticité* (n° 297).

(Fresnel, *Mémoires de l'Institut*, t. VIII, p. 130, et Herschel, *Théorie de la lumière*.)

220. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, équation de l'ellipsoïde.

$lx + my + nz = 0$, équation du plan.

En opérant comme dans le numéro précédent, l'équation qui détermine les axes est la suivante :

$$\frac{a^2 l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

Après avoir ordonné par rapport à r, on trouve que le produit des demi-axes de l'ellipse d'intersection est

$$\frac{abc}{(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2)^{\frac{1}{2}}};$$

et, par suite, la surface a pour expression :

$$\frac{\pi abc}{(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

221. La question revient à trouver le produit des trois demi-axes principaux, et comme ces demi-axes sont les valeurs maximum et minimum du rayon vecteur ayant le centre pour origine, il suffit de chercher les maximums et minimums de la quantité

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

x, y, z étant liées par l'équation de l'ellipsoïde. On trouve alors, en appelant λ une indéterminée,

$$\lambda x + ax + b'z + b''y = 0,$$
$$\lambda y + a'y + bz + b''x = 0,$$
$$\lambda z + a''z + by + b'x = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{c}{r^2}.$$

En substituant, il vient

$$\left(\frac{c}{r^2}-a\right)x - b''y - b'z = 0,$$

$$b''x - \left(\frac{c}{r^2}-a'\right)y + bz = 0,$$

$$b'x + by - \left(\frac{c}{r^2}-a''\right)z = 0.$$

Multipliant la première équation par

$$\left(\frac{c}{r^2}-a'\right)\left(\frac{c}{r^2}-a\right) - b^2,$$

la deuxième par

$$-\left[bb' + b''\left(\frac{c}{r^2}-a''\right)\right],$$

la troisième par

$$-\left[bb'' + b'\left(\frac{c}{r^2}-a'\right)\right],$$

et ajoutant, il reste, toutes suppressions faites,

$$\left(\frac{c}{r^2}-a\right)\left(\frac{c}{r^2}-a'\right)\left(\frac{c}{r^2}-a''\right)$$
$$-b^2\left(\frac{c}{r^2}-a\right) - b'^2\left(\frac{c}{r^2}-a'\right) - b''^2\left(\frac{c}{r^2}-a''\right) - 2bb'b'' = 0.$$

On ordonne par rapport à r^2, et on arrive, pour la surface demandée, à l'expression

$$\frac{4\pi}{3}\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 + 2bb'b'')^{\frac{1}{2}}}.$$

222. (*Fig.* 8.) En désignant par α et β les coordonnées du centre de l'ellipse cherchée, l'équation de cette courbe

peut s'écrire

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=0.$$

Posons $CA=p$, $CB=q$, et exprimons que la courbe passe par les points C, A, B; il en résulte les trois équations

$$(1)\qquad A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+1=0,$$

$$(2)\qquad A(p-\alpha)^2-2B(p-\alpha)\beta+C\beta^2+1=0,$$

$$(3)\qquad C(q-\beta)^2-2B(q-\beta)\alpha+A\alpha^2+1=0.$$

Retranchons successivement l'équation (1) des équations (2) et (3), il vient

$$(4)\qquad A(2\alpha-p)+2B\beta=0,$$

$$(5)\qquad C(2\beta-q)+2B\alpha=0.$$

Les relations (1), (4), (5) donnent enfin, pour les coefficients A, B, C,

$$A=\frac{-(2\beta-q)}{\alpha(p\beta+q\alpha-pq)},\quad B=\frac{(2\alpha-p)(2\beta-q)}{2\alpha\beta(p\beta+q\alpha-pq)},$$

$$C=\frac{-(2\alpha-p)}{\beta(p\beta+q\alpha-pq)}.$$

Pour obtenir l'expression S de la surface de l'ellipse en fonction de ces quantités, cherchons, en suivant la marche du numéro précédent, l'équation qui a pour racines les demi-axes de la courbe. Cette équation est la suivante :

$$(AC-B^2)z^4+(A+C-2B\cos\theta)z^2+\sin^2\theta=0;$$

le carré du produit des demi-axes est donc

$$\frac{\sin^2\theta}{AC-B^2},$$

et, par suite,

$$S=\frac{\pi\sin\theta}{(AC-B^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le minimum de S correspondant au maximum de $AC - B^2$, il suffit de chercher le maximum de cette fonction des deux variables α et β. Les valeurs de A, B, C sont connues ; en faisant le calcul et ne prenant que les facteurs utiles, on arrive aux équations

$$2q\alpha + p\beta - pq = 0, \quad 2p\beta + q\alpha - pq = 0;$$

d'où

$$\alpha = \frac{p}{3}, \quad \beta = \frac{q}{3}.$$

Le centre de l'ellipse est donc au centre de gravité du triangle, et sa surface a pour expression

$$\frac{2\pi pq \sin\theta}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

Euler est le premier qui ait traité ce problème. La solution précédente est due à Bérard (*Annales de Gergonne*, t. IV). M. Liouville en a donné, dans le tome VII de son journal, une solution géométrique très-simple.

223. Cette question peut se résoudre en suivant une marche semblable à celle du numéro précédent. On trouve ainsi que l'aire de l'ellipse maximum est égale à celle du triangle multipliée par $\frac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}}$, que son centre coïncide avec le centre de gravité du triangle, et que les points de contact sont les milieux des côtés.

(Bérard, *Annales de Gergonne*, t. IV.)

224. h désignant la hauteur; α, β, γ les angles dièdres correspondants aux côtés a, b, c de la base, il faut rendre minimum l'expression

$$\frac{ah}{\sin\alpha} + \frac{bh}{\sin\beta} + \frac{ch}{\sin\gamma},$$

qui représente la somme des triangles latéraux. Les angles α, 6, γ sont liés d'ailleurs par la condition

$$a\cot\alpha + b\cot 6 + c\cot\gamma = \text{const.}$$

On trouve

$$\alpha = 6 = \gamma.$$

225. Soient A, B, C les points donnés. Prenons pour axe des x la droite qui joint A et P, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite menée par le point A. α étant l'abscisse de B; a, b, les coordonnées de C; x, y celles du point cherché, l'expression à rendre minimum est la suivante :

$$\varphi(x,y) = [(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}} + [(x-\alpha)^2+y^2]^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0;$$

on en tire

$$\frac{a-x}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{b-y}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{[(x-\alpha)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$1 = 2 + \frac{2[(x-\alpha)x+y^2]}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}[(x-\alpha)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où l'on déduit

$$(x^2+y^2-\alpha x)^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)[(x-\alpha)^2+y^2];$$

et comme le second membre peut s'écrire

$$\frac{1}{4}[(x^2+y^2-\alpha x)^2+\alpha^2 y^2],$$

on trouve enfin

$$x^2 + y^2 - ax = \pm \frac{ay}{3^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette équation représente les deux cercles qui correspondent aux segments capables des angles de 120 degrés qu'on peut décrire sur la corde AB. Il suit de là que le point cherché est à l'intersection de trois segments semblables décrits sur les côtés AB, AC, BC; il jouit par conséquent de cette propriété que les droites qui le joignent aux points A, B, C forment trois angles égaux entre eux et de 120 degrés.

Quand le triangle ABC a un angle plus grand que 120 degrés, les segments ne peuvent pas se couper. Les deux conditions $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ sont alors incompatibles. Le problème ayant toujours une solution, pour trouver celle qui convient dans ce cas, remarquons que les dérivées deviennent $\frac{0}{0}$ si l'on prend pour le point cherché l'un des trois points A, B, C; c'est donc l'un de ces trois points qui résout la question, et l'on voit sans peine qu'il faut choisir le sommet de l'angle obtus.

Ce problème fut proposé par Toricelli à Fermat, qui en donna peu après trois solutions; plusieurs géomètres s'en sont occupés depuis. La solution précédente est due à M. J. Bertrand (*Journal de* LIOUVILLE, t. VIII).

§ XI. — *Tangentes aux courbes planes.*

226. Sous-tang $= \frac{x^2}{x - y}$.

227. (*Fig.* 9.) AC $= a$, AB $= b$. L'équation de la parabole tangente aux droites données est

$$(ay - bx)^2 - 2ab\,(ay + bx) + a^2 b^2 = 0,$$

qui se met sous la forme plus simple

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

La tangente a pour équation

$$\frac{X}{(ax)^{\frac{1}{2}}} + \frac{Y}{(by)^{\frac{1}{2}}} = 1;$$

par conséquent,

$$AF = (by)^{\frac{1}{2}} = y_0, \quad AE = (ax)^{\frac{1}{2}} = x_0;$$

le point (x_0, y_0) est donc sur la droite

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

228. L'équation de la tangente étant

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

les segments x_0, y_0, que cette droite détermine sur les axes à partir de l'origine, ont pour valeurs $(a^2x)^{\frac{1}{3}}$, $(a^2y)^{\frac{1}{3}}$; d'où il suit que la portion de cette tangente comprise entre les axes est constamment égale à la longueur a.

Cette propriété est caractéristique de la courbe en question, qui est une hypocycloïde (n° 229).

229. Quand le cercle (*fig.* 10), dont le centre est O et dont le rayon est égal à a, roule sans glisser sur la droite AX donnée de position, la courbe engendrée par un point M de la circonférence est une cycloïde. Si l'on considère la ligne que décrit en même temps un point M′ situé sur le rayon variable OM, on la nomme une *cycloïde allongée* ou une *cycloïde accourcie,* selon que le point décrivant est intérieur ou extérieur au cercle mobile.

Pour obtenir l'équation du lieu des positions de M′, soient b la distance de ce point au centre du cercle, AX l'axe des x, A l'origine des axes et aussi le sommet de la cycloïde engendrée par le point M; si B désigne le point de contact de la circonférence avec l'axe des x pour une position donnée du point M′, et φ l'angle variable M′OB, il vient

$$(A) \qquad \begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi, \\ y = a \;\; - b\cos\varphi. \end{cases}$$

Le système de ces deux équations représente une cycloïde allongée ou accourcie, selon qu'on a $b < a$ ou $b > a$. On en tire

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2 - (a-y)^2}.$$

Si la droite fixe est remplacée par un cercle, le point M engendre une *épicycloïde*, le point M′ une *épicycloïde allongée*, le point M″ une *épicycloïde accourcie*. Dans le cas où le cercle mobile est *intérieur* au cercle fixe, les lieux des points M, M′, M″ sont des *hypocycloïdes*.

Pour trouver l'équation de l'une de ces courbes, par exemple celle de l'épicycloïde allongée engendrée par le point M (*fig.* 11), posons $OQ = b$, $OM = h$, $CN = x$, $MN = y$, $ACB = \theta$; si l'on admet qu'à l'origine du mouvement les points Q et A étaient confondus, on aura

$$QOB = \frac{a}{b}\theta$$

et

$$(B) \qquad \begin{cases} x = CH + HN = (a+b)\cos\theta - h\cos\dfrac{a+b}{b}\theta, \\ y = OH - OK = (a+b)\sin\theta - h\sin\dfrac{a+b}{b}\theta. \end{cases}$$

Le système (B) représente une épicycloïde allongée ou

accourcie selon qu'on a $h < b$ ou $h > b$. Il tient lieu d'une équation unique qui résulterait de l'élimination de θ, et qui serait, en général, moins commode pour les calculs, surtout si le nombre $\frac{a+b}{b} = n$ était irrationnel. On peut d'ailleurs, dans tous les cas, obtenir cette équation. On déduit en effet des équations (B)

$$bn\cos\theta = x + h\cos n\theta,$$
$$bn\sin\theta = y + h\sin n\theta;$$
$$h\cos n\theta = bn\cos\theta - x,$$
$$h\sin n\theta = bn\sin\theta - y;$$

d'où l'on tire

$$b^2n^2 = x^2 + y^2 + h^2 + 2h(x\cos n\theta + y\sin n\theta),$$
$$h^2 = x^2 + y^2 + b^2n^2 - 2bn(x\cos\theta + y\sin\theta),$$

ou bien

$$x\cos n\theta + y\sin n\theta = \frac{b^2n^2 - x^2 - y^2 - h^2}{2h} = p,$$
$$x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{x^2 + y^2 + b^2n^2 - h^2}{2bn} = q;$$

et par suite, en remplaçant les fonctions trigonométriques par leurs formes imaginaires,

$$(x - iy)e^{2ni\theta} - 2pe^{ni\theta} + (x + iy) = 0,$$
$$(x - iy)e^{2i\theta} - 2qe^{i\theta} + (x + iy) = 0.$$

On conclut de là

$$e^{ni\theta} = \frac{p \pm (p^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - iy}, \quad e^{i\theta} = \frac{q \pm (q^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - iy};$$

par conséquent,

$$\left[q \pm (q^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n = (x - iy)^{n-1}\left[p \pm (p^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

ce qui est l'équation cherchée, en y supposant p et q remplacées par leurs valeurs connues en x et en y, et qui ne peut être rendue rationnelle qu'autant que le nombre n est lui-même rationnel.

On voit facilement que le système (B) se met aussi sous la forme, quelquefois utile,

$$(\text{B}')\quad \begin{cases} he^{ni\theta} - (a+b)e^{i\theta} + x + iy = 0, \\ (x - iy)\,e^{ni\theta} - (a+b)\,e^{(n-1)i\theta} + h = 0. \end{cases}$$

L'hypocycloïde allongée ou accourcie est représentée par le système

$$(\text{C})\quad \begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + h\cos\dfrac{a-b}{b}\,\theta, \\ y = (a-b)\sin\theta - h\sin\dfrac{a-b}{b}\,\theta, \end{cases}$$

tout à fait analogue au système (B), et qui s'en déduit en remplaçant dans celui-ci b par $-b$ et h par $-h$. Il suffit donc de considérer les équations (B) pour embrasser tous les cas.

En faisant $h = b$, on obtient les équations suivantes pour représenter les épicycloïdes et les hypocycloïdes :

$$(\text{D})\quad \begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\dfrac{a+b}{a}\,\theta, \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a+b}{a}\,\theta. \end{cases}$$

La détermination de la tangente au point xy de la courbe définie par les équations (B) exige la connaissance de $\dfrac{dy}{dx}$. Or on a

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{a+b}{a}\left(b\sin\theta - h\sin\frac{a+b}{b}\,\theta\right),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{a+b}{b}\left(b\cos\theta - h\cos\frac{a+b}{b}\,\theta\right);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\theta - h\cos\frac{a+b}{b}\theta}{b\sin\theta - h\sin\frac{a+b}{b}\theta}.$$

Ce résultat, qui suffit à la détermination analytique de la tangente, ne met pas en évidence une construction géométrique simple; mais si l'on cherche l'équation de la normale, on trouve

$$\left[\mathrm{Y} - (a+b)\sin\theta + h\sin\frac{a+b}{b}\theta\right]\left(b\cos\theta - h\cos\frac{a+b}{b}\theta\right)$$
$$= \left[\mathrm{X} - (a+b)\cos\theta + h\cos\frac{a+b}{b}\theta\right]\left(b\sin\theta - h\sin\frac{a+b}{b}\theta\right),$$

et l'on voit manifestement, sous cette forme, qu'en faisant $\mathrm{Y} = a\sin\theta$ et $\mathrm{X} = a\cos\theta$ l'équation est satisfaite. Or le point dont les coordonnées sont $a\sin\theta$ et $a\cos\theta$ n'est autre que le point de contact du cercle mobile et du cercle fixe, d'où résulte une construction immédiate de la normale tout à fait semblable à celle que l'on connaît pour la cycloïde. Il est évident que cette construction s'applique également aux courbes (A). Elle est d'ailleurs susceptible d'une très-grande généralisation (n° 240).

La théorie des épicycloïdes est née d'un problème industriel. C'est en cherchant la meilleure forme à donner aux dents d'un engrenage que l'astronome danois Römer y fut conduit en 1674. Plus tard (1694), de la Hire publia sur ces courbes un travail étendu, et plusieurs autres géomètres, notamment Halley (*Transact. phil.*), Newton (*Princip.*) et Euler (*Introd. in Anal. infinit.*), en ont étudié les propriétés.

Descartes s'est occupé le premier des cycloïdes allongées et des cycloïdes accourcies; il en a déterminé les tangentes.

Parmi les courbes représentées par les équations (B), on remarque certains cas particuliers :

1° $h = b = -\frac{a}{4}$. La courbe est une hypocycloïde dont l'équation est

$$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = 27 a^2 x^2 y^2,$$

et peut prendre la forme plus simple

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe se rencontre dans plusieurs questions (n° 228).

2° $b = -\frac{a}{2}$. On trouve une ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2} + h\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2} - h\right)^2} = 1.$$

3° $b = h = a$. On obtient l'équation

$$r = 2a(1 - \cos\theta).$$

La courbe est une des caustiques du cercle, le point lumineux étant sur la circonférence. A cause de sa forme, elle a reçu le nom de *Cardioïde* (*Transact. phil.*, 1741).

4° $b = h = \frac{a}{2}$. On trouve

$$4(y^2 + x^2 - a^2)^3 = 27 a^4 y^2.$$

5° $h = b = -\frac{a}{2}$. Le lieu est un diamètre du cercle fixe, résultat facile à voir par la Géométrie.

230. Soient A l'origine des axes, $AM = r$, $AH = p$. Les coordonnées de M sont x et y, celles de H, α et 6; P est la distance inconnue. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 6}{x - \alpha} = -\frac{\alpha}{6},$$

ce qui donne

$$(1)\qquad \alpha x + 6y = \alpha^2 + 6^2 = p^2,$$

$$(2)\qquad \alpha dx + 6dy = 0.$$

Or

$$P = \frac{\alpha \frac{d6}{d\alpha} - 6}{\left(1 + \frac{d6^2}{d\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

des équations (1) et (2), on tire

$$\frac{d6}{d\alpha} = -\frac{x - 2\alpha}{y - 26},$$

et en substituant dans P,

$$P = \frac{p^2}{r}.$$

C. Q. F. D.

231. (*Fig.* 12.) Soient AB, BC, CD trois côtés consécutifs du polygone minimum, et prenons pour origine le point E, où se rencontrent AB et CD; la tangente BC doit être telle que le triangle ECB soit maximum. Déterminons le point de contact M par cette condition. On a

$$EC = y - x\frac{dy}{dx}, \quad EB = x - y\frac{dx}{dy}$$

et

$$CBE = -\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{dx}{dy} \sin E.$$

Pour le maximum on trouve, en différentiant,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(2x + y\frac{dx}{dy} - x\right) = 0;$$

et, en égalant à zéro le dernier facteur du premier membre

de cette équation, il vient

$$x = \frac{1}{2}\left(x - y\,\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{EB},$$

ce qui montre que le côté CB est partagé en deux parties égales par le point de contact. La même chose a donc lieu pour tous les côtés du polygone cherché.

232. Soient n le nombre des points $m_1, m_2, m_3, \ldots$; x_p, y_p les coordonnées de m_p; ξ, η celles du point μ; on a

$$\Sigma[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] = \text{const.},$$

et, en différentiant, toutes les quantités variables pouvant être considérées comme fonctions de l'une d'entre elles,

$$(1)\quad \Sigma[(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta] = \Sigma[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy].$$

Or

$$(\xi - x_p)\,dx_p + (\eta - y_p)\,dy_p = 0,$$

puisque chaque normale passe par le point μ. On peut donc écrire l'équation (1) sous la forme

$$d\xi\,(n\xi - \Sigma x) + d\eta\,(n\eta - \Sigma y) = 0,$$

ou

$$\left(\xi - \frac{\Sigma x}{n}\right) d\xi + \left(\eta - \frac{\Sigma y}{n}\right) d\eta = 0,$$

c'est-à-dire que la normale au lieu des points μ passe par le point qui a pour coordonnées $\frac{\Sigma x}{n}$, $\frac{\Sigma y}{n}$.

C. Q. F. D.

233. L'origine étant au point A et la direction de la corde étant prise pour celle de l'axe des x, il faut chercher le maximum de l'expression

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a - x)^2 + y^2}.$$

10.

Si l'on égale à zéro la différentielle de cette quantité, dans laquelle y est une fonction donnée de x, il vient

$$(1) \qquad \frac{x + y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a - x - y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}.$$

Soit N le point où la normale en m rencontre la corde AB; l'équation (1) revient à

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{A}m} = \frac{\mathrm{NB}}{m\mathrm{B}},$$

c'est-à-dire que la tangente au point m est également inclinée sur $\mathrm{A}m$ et sur $\mathrm{B}m$.

Solution géométrique. — La position du point m étant supposée connue, soit m' un point infiniment voisin. L'accroissement de la distance $\mathrm{A}m$ est égal à $mm' \sin mm'\mathrm{A}$; la diminution de $m\mathrm{B}$ est $mm' \sin \mathrm{B}mm'$; d'où résulte, pour l'accroissement infiniment petit de la somme $\mathrm{A}m + m\mathrm{B}$, la quantité $mm'(\sin mm'\mathrm{A} - \sin \mathrm{B}mm')$. Or, en vertu de la théorie du maximum des fonctions d'une variable, cet accroissement doit être un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. On a donc

$$\lim(\sin mm'\mathrm{A} - \sin \mathrm{B}mm') = 0,$$

ce qui donne le résultat déjà obtenu.

234. Soient

$$y = f(x), \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$$

les équations des trois courbes; x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées des points m, m_1, m_2 pris sur ces courbes et formant le triangle mm_1m_2, dont la surface A s'exprime par la formule

$$\mathrm{A} = \pm \frac{1}{2}[x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1)].$$

Comme A dépend de trois variables indépendantes x, x_1, x_2, la condition du maximum donne les trois équations

$$(x_1 - x_2)\frac{dy}{dx} = (y_1 - y_2),$$

$$(x_2 - x)\frac{dy_1}{dx_1} = (y_2 - y),$$

$$(x - x_1)\frac{dy_2}{dx_2} = (y - y_1).$$

Ces résultats expriment que la normale en chaque sommet est perpendiculaire à la droite qui joint les deux autres; les normales aux courbes données se rencontrent donc en un même point.

Dans le cas particulier énoncé, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ étant l'équation de l'ellipse, on a

$$\frac{xx_1 - xx_2}{a^2} + \frac{yy_1 - yy_2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_1x_2 - xx_1}{a^2} + \frac{y_1y_2 - yy_1}{b^2} = 0,$$

$$\frac{xx_2 - x_1x_2}{a^2} + \frac{yy_2 - y_1y_2}{b^2} = 0.$$

Comme la dernière équation résulte des deux premières, le problème n'est pas déterminé. Pour le déterminer, concevons que le point m soit donné et rapportons la courbe à deux diamètres conjugués. L'équation de l'ellipse peut s'écrire

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

le point m étant l'extrémité du demi-diamètre a_1. On trouve alors

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1(x_2 - a_1) + \sqrt{a_1^2 - x_1^2}\sqrt{a_1^2 - x_2^2} = 0,$$

d'où

$$x_2 = x_1 = -\frac{a_1}{2}, \quad y_2 = \pm\frac{b_1\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 = \pm\frac{b_1\sqrt{3}}{2}.$$

Il faut évidemment prendre y_2 et y_1 de signes contraires. D'ailleurs, à cause de l'obliquité des axes coordonnés, l'expression A du numéro précédent doit être multipliée par $\sin\theta$, θ étant l'angle des axes. Il en résulte que la surface maximum du triangle est égale à

$$\frac{\sqrt{27}}{4} a_1 b_1 \sin\theta = \frac{\sqrt{27}ab}{4}.$$

235. L'équation de l'ellipse étant

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = a^2 b^2,$$

la normale au point x, y a pour équation

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x);$$

et si l'on désigne par x_1, y_1 les coordonnées du point où cette ligne rencontre obliquement la courbe, l'expression dont on cherche le maximum ou le minimum est

$$(1) \qquad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = l^2,$$

avec les conditions

$$(2) \qquad \frac{x_1 - x}{b^2 x} = \frac{y_1 - y}{a^2 y},$$

$$(3) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

$$(4) \qquad a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2.$$

Des relations (3) et (4) on déduit celle-ci :

$$(5) \quad a^2(y_1 - y)^2 + b^2(x_1 - x)^2 + 2a^2 y(y_1 - y) + 2b^2 x(x_1 - x) = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent d'ailleurs

$$\frac{x_1 - x}{b^2 x} = \frac{y_1 - y}{a^2 y} = \frac{\pm l}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}.$$

En portant ces valeurs dans (5), on en tire

$$(6)\qquad l^2 = \frac{4(a^4y^2+b^4x^2)^3}{(a^6y^2+b^6x^2)^2} = \frac{4b^2(a^4-c^2x^2)^3}{[a^6-c^2(a^2+b^2)x^2]^2}.$$

Si l'on égale à zéro la différentielle de ce résultat, on trouve les deux solutions :

$$(6)\qquad x = 0,$$

$$(7)\qquad x = \pm\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}}.$$

La dernière, combinée avec l'équation (3), donne

$$(8)\qquad y = \pm\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

Les relations (7) et (8) définissent quatre points symétriquement situés par rapport aux axes et répondant à des longueurs minimum, pourvu toutefois qu'on ait $a^2-2b^2>0$. En effet, les extrémités du grand axe répondent évidemment à des maximums, et l'on ne peut passer de l'un à l'autre sans rencontrer au moins un minimum ; la symétrie de la courbe en doit d'ailleurs fournir au moins deux de chaque côté du grand axe. Il suit de là que la solution $x=0$ correspond à un maximum.

Les résultats changent si l'on a $a^2-2b^2<0$; les quatre minimums n'existent plus, et la solution $x=0$ répond alors à un minimum. On s'assure facilement de cette dernière circonstance en mettant l^2 sous la forme

$$l^2 = 4b^2\left(1-\frac{c^2x^2}{a^4}\right)^3\left(1-\frac{c^2\overline{a^2+b^2}}{a^6}x^2\right)^{-2}.$$

Si l'on développe le second membre, en supposant x aussi petit qu'on veut, on trouve

$$l^2 = 4b^2 + \frac{4b^2c^2x^2}{a^6}(2b^2-a^2)+\ldots,$$

ce qui démontre que l'extrémité du petit axe répond à un maximum quand on a $2b^2 - a^2 < 0$, et à un minimum dans le cas contraire.

La règle ordinaire pour la recherche des maximums et des minimums de $f(x)$ n'a pas donné les solutions maximums répondant aux extrémités du grand axe. Cela tient à ce que, dans la question présente, on ne peut comparer à $f(a)$ les deux expressions $f(a+h)$, $f(a-h)$, h étant un infiniment petit positif, vu qu'il n'y a pas de points de l'ellipse dont l'abscisse surpasse a.

Remarque. — Si l'on cherche les valeurs de x_1, y_1 dans l'hypothèse $a^2 - 2b^2 > 0$, on trouve

$$x_1 = \pm \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et ces coordonnées satisfont à l'équation de la développée de l'ellipse

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

(O. Bonnet.)

236. 1° L'angle de la tangente avec le rayon vecteur étant désigné par φ, on a

$$\tang\varphi = \alpha \quad \text{et} \quad \text{sous-tang} = r\alpha.$$

Soient r_1 et θ_1 les coordonnées polaires de l'extrémité de cette sous-tangente, on trouve

$$r_1 = a\alpha e^{\frac{\pi}{2\alpha}} . e^{\frac{\theta_1}{\alpha}},$$

équation d'une autre spirale logarithmique qui ne diffère de la proposée que par sa position dans le plan.

2° r_2 et θ_2 étant les coordonnées de l'extrémité de la sous-normale, on a

$$r_2 = \frac{a}{\alpha} e^{-\frac{\pi}{2\alpha}} . e^{\frac{\theta_2}{\alpha}},$$

équation d'une spirale encore identique à la proposée, mais autrement placée.

237. Il suffit de considérer les points de la courbe donnée pour lesquels $n\theta$ n'excède pas $\frac{\pi}{2}$. Soient r et θ les coordonnées d'un point m pris sur cette courbe; r_1 et θ_1 celles du point correspondant du lieu cherché; φ l'angle que la tangente en m fait avec le rayon vecteur. On a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{rd\theta}{dr} = -\cot n\theta.$$

Il résulte généralement de là

$$\varphi = n\theta - \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

k étant un entier quelconque. D'ailleurs, en supposant n positif, φ représente un angle obtus, et l'on trouve facilement la relation

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta.$$

Il suit de là qu'il faut prendre $k = 1$, ce qui donne

$$\theta_1 - \theta = n\theta,$$

et par suite,

$$\cos n\theta = \cos\frac{n\theta_1}{n+1}.$$

D'un autre côté,

$$r_1 = r\sin\varphi = r\cos n\theta;$$

d'où

$$r_1^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{n}{n+1}}\cos\frac{n}{n+1}\theta,$$

équation de même forme que la proposée. Le résultat n'eût pas été différent si l'on avait supposé n négatif.

238. Concevons la courbe rapportée à des axes rectan-

gulaires ox, oy, dont l'origine soit située, par rapport aux droites A et B, du même côté que le point m. Si l'on désigne par p la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur A, par α et 6 les angles de cette perpendiculaire avec l'axe des x et l'axe des y, la distance de m à A aura pour expression

$$p - x\cos\alpha - y\cos 6.$$

Semblablement, la distance de ce point à B peut s'écrire

$$p_1 - x\cos\alpha_1 - y\cos 6_1.$$

Les coordonnées des points P et Q étant respectivement a et b, a_1 et b_1, on a

$$Pm = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad Qm = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}.$$

L'équation de la normale est d'ailleurs

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\frac{du}{dy} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}}.$$

Or on a, dans tous les cas,

$$\frac{du}{dx} = -\cos(u, x), \quad \frac{du}{dy} = -\cos(u, y),$$

$$\frac{dv}{dx} = -\cos(v, x), \quad \frac{dv}{dy} = -\cos(v, y),$$

en désignant généralement par (D, D_1) l'angle des directions des droites représentées par D et D_1. L'équation de la normale prend alors la forme

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\cos(u, x) + \frac{df}{dv}\cos(v, x)} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\cos(u, y) + \frac{df}{du}\cos(v, y)},$$

qui n'est autre chose que l'expression analytique du théorème énoncé.

239. En prenant l'axe des x pour axe polaire et l'origine pour pôle, on a les formules

$$X = R\cos\Theta, \qquad Y = R\sin\Theta,$$

où R et Θ désignent les coordonnées d'un point quelconque de la tangente. On a aussi

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'\sin\theta - f\cos\theta}{f'\cos\theta + f\sin\theta},$$

f et f' étant mis pour $f(\theta)$ et $f'(\theta)$. L'équation proposée peut donc s'écrire

$$(f R\sin\Theta - \sin\theta)(f'\cos\theta + f\sin\theta)$$
$$+ (f R\cos\Theta - \cos\theta)(f\cos\theta - f'\sin\theta) = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{R} = f(\theta)\cos(\Theta - \theta) + f'(\theta)\sin(\Theta - \theta).$$

C. Q. F. T.

Cette formule s'obtient aisément par la Géométrie.

240. Rapportons la courbe B à des axes rectangulaires. Soient $t'mt$ la tangente commune à A et B; x, y les coordonnées du point de contact m; ξ, η celles du point μ. La longueur $\mu m = r$ et l'angle de sa direction avec une droite quelconque, invariablement liée à A, constituent un système de coordonnées polaires auquel on peut concevoir que sont rapportés les points de cette courbe. Cela posé, de l'équation évidente

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2,$$

on tire par la différentiation

$$(1) \quad \frac{(x-\xi)}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{(y-\eta)}{r}\frac{dy}{ds} - \left(\frac{x-\xi}{r}\frac{d\xi}{ds} + \frac{y-\eta}{r}\frac{d\eta}{ds}\right) = \frac{dr}{ds},$$

ds représentant l'élément de la courbe B. Or l'angle $t'm\mu$, formé par le rayon vecteur μm et la direction mt', a pour cosinus $\frac{dr}{ds}$; ce cosinus est aussi égal à $\frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds}$. L'équation (1) se réduit donc à

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+1=0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

§ XII. — *Points singuliers. — Construction de courbes.*

241. $x=\frac{3a}{2}$, point d'inflexion.

242. $x=0$ et $x=c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, points d'inflexion.

243. $x=\pm\frac{a}{6^{\frac{1}{2}}}$, point d'inflexion.

244. $\frac{m}{n}>1$; $x=a$, point d'inflexion;

la tangente en ce point est parallèle à l'axe des x.

$\frac{m}{n}<1$; $x=a$, point d'inflexion;

tangente perpendiculaire à l'axe des x.

245. (*Fig.* 13.) L'origine est un point triple; l'une des branches touche l'axe des x, les deux autres font avec ce même axe des angles dont les tangentes sont

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

246. (*Fig.* 14.) Point triple à l'origine. En ce point,

$\frac{dy}{dx}$ a pour valeurs

$$0, \quad 2^{\frac{1}{2}}, \quad -2^{\frac{1}{2}}.$$

247. (*Fig.* 15.) Trois points doubles :

$$y=0, \quad x=a, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$y=0, \quad x=-a, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$y=-a, \quad x=0, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

248. (*Fig.* 16.) Point double à l'origine. Une tangente à l'origine, différente de l'axe des x, touche la courbe au point pour lequel on a

$$x=\frac{2^{\frac{3}{2}}a}{9}, \quad y=\frac{8a}{9}.$$

249. Rebroussement de première espèce pour $x=a$.

250. Quatre directions infinies. Deux branches asymptotiques. L'asymptote parallèle à l'axe des y coupe la courbe. Rebroussement de seconde espèce à l'origine.

251. (*Fig.* 17.) Deux branches infinies sans asymptotes. Point d'inflexion pour $x=\frac{64}{225}a$ sur la branche qui s'étend indéfiniment dans la région Y'OX. Rebroussement de seconde espèce à l'origine.

252. (*Fig.* 18.) Deux points doubles pour $x=\pm 2a$. En ces points $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$. Quatre points d'inflexion.

253. (*Fig.* 20.) Asymptotes : $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\left(x+\frac{a}{6}\right)$.

A l'origine, rebroussement de première espèce. Quatre points d'inflexion, dont deux situés sur l'axe des x.

254. L'équation se ramène à

$$y = \pm \left[\left(\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{a^2 - b^2 + x^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$x = 0, \quad y = \pm \left[\left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right];$$

points d'inflexion.

$$y = 0, \quad y = \pm b,$$

points multiples, pour lesquels on a

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2^{\frac{1}{2}} b}{a}.$$

La courbe présente la forme de deux cœurs qui se croisent. Quand $a = b$, elle se réduit au système de deux ellipses.

255. (*Fig.* 19.) En substituant des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes, l'équation est résoluble par rapport au rayon vecteur. On la discute d'ailleurs, sans changer de coordonnées, en prenant une inconnue auxiliaire $t = \frac{x}{y}$, ce qui donne

$$2x = \pm t (a^2 t^8 + 4 b^2 t)^{\frac{1}{2}} - a t^5,$$

$$2y = \pm (a^2 t^8 + 4 b^2 t)^{\frac{1}{2}} - a t^4.$$

L'origine est un point triple, un point d'inflexion et un point de rebroussement. Les points de la portion fermée de la courbe qui sont les plus éloignés de l'axe des x et des y

ont respectivement pour coordonnées

$$x = b\left(\frac{108\,b^3}{3125\,a^3}\right)^{\frac{4}{7}}, \quad y = b\left(\frac{24\,b}{625\,a}\right)^{\frac{1}{7}};$$

$$x = \frac{b}{2}\left(\frac{9\,b^3}{8\,a^3}\right)^{\frac{1}{7}}, \qquad y = \frac{b}{2}\left(\frac{27\,b}{2\,a}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

L'examen de la dérivée exprimée en fonction de t fait connaître l'existence d'un point d'inflexion sur la branche située dans l'angle XOY′.

256. La courbe a une infinité de points doubles, pour lesquels $\frac{dy}{dx} = \pm (k\pi)^{\frac{1}{2}}$, k recevant toutes les valeurs entières positives. Elle a aussi une infinité de points isolés.

257. Lorsque les courbes sont représentées par des équations en coordonnées polaires, on trouve généralement les points d'inflexion en posant

$$\text{(A)} \qquad r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2} = 0 \quad \text{ou} \quad = \infty.$$

Il est quelquefois avantageux de remplacer cette condition par celle-ci, qui lui est équivalente :

$$\text{(B)} \qquad \frac{du}{d\theta} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0 \quad \text{ou} \quad = \infty,$$

u étant l'inverse du rayon vecteur.

Pour la courbe dont il s'agit ici, la condition indiquée donne

$$\pm a^2 (4\theta^2 - 1) = 0,$$

d'où

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad r = a\sqrt{2}.$$

Cette courbe, cas particulier des spirales dont l'équa-

tion est $r = a\theta^n$, a été désignée par Cotes sous le nom de *Lituus* (*Harmonia mensurarum*).

258. L'équation (A) ou l'équation (B) du numéro précédent devient ici

$$b\sin^3\theta + 3a\sin^2\theta - 2a = 0,$$

ou, en posant $\frac{1}{\sin\theta} = z$,

$$(1) \qquad 2az^3 - 3az - b = 0.$$

Si l'on a $a \geqq b$, les trois racines de l'équation (1) sont réelles, mais l'une d'elles ne satisfait pas à la condition $-1 < \sin\theta < 1$.

Si $a < b$, deux racines sont imaginaires. Il en résulte que la conchoïde a quatre points d'inflexion quand a est plus grand que b, et deux seulement si a est plus petit que b.

Il y a également deux points d'inflexion si $a = b$.

La conchoïde peut se construire de la manière suivante. D'un point fixe A on mène un rayon vecteur quelconque indéfini qui rencontre en B une droite XX' dont la position est invariable. A partir de B, on porte sur le rayon vecteur, et dans les deux sens, des longueurs BM, BN égales à une ligne donnée a; la conchoïde est le lieu décrit par les points M et N, quand on suppose que le rayon vecteur tourne autour du point A.

Cette courbe fut imaginée par le géomètre Nicomède (environ 150 ans avant J.-C.) pour résoudre les deux problèmes, si célèbres chez les anciens, de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Newton en a fait usage pour la construction des équations du troisième degré (*Arithmétique universelle*), et les architectes Vignole et Blondel l'ont utilisée pour le tracé des fûts de colonne (*Cours d'Architecture*, par d'Aviler). On peut substituer

à la base XX′ une ligne quelconque, et l'on obtient alors des *conchoïdes d'ordre supérieur*. Dans le cas où l'on prend un cercle et où le point A est sur la circonférence, on trouve le limaçon de Pascal. De Lahire a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1708), un long travail sur les conchoïdes à base quelconque.

259. (*Fig.* 21.) Asymptotes répondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$, à la distance a du pôle.

Point multiple à l'origine.

Points d'inflexion donnés par l'équation

$$3\cos\theta + 2\sin^3\theta = 0,$$

ou

$$2\,\text{tang}^3\theta + 3\,\text{tang}^2\theta + 3 = 0,$$

dont une seule racine est réelle.

260. (*Fig.* 22.) L'axe des y est une asymptote.

Les points d'inflexion, autres que l'origine, sont déterminés par l'équation

$$8\cos^3 2\theta + 3\cos^2 2\theta + 6\cos 2\theta + 10 = 0,$$

qui ne donne qu'une valeur réelle pour $\cos 2\theta$.

La plupart des courbes données dans ce paragraphe sont tirées de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes*, par Cramer (Genève, 1750).

§ XIII. — *Rayons de courbure et développées des courbes planes.*

Notations et formules. — ρ, rayon de courbure en un point (x, y) ou (r, θ) d'une courbe donnée par l'équation

$$f(x, y) = 0, \quad \text{ou} \quad F(r, \theta) = 0;$$

ε, angle de la tangente avec l'axe des x ou l'axe polaire;

p, distance de l'origine à la tangente;

α et 6, coordonnées du centre de courbure;

$u = \frac{1}{r}$.

$$(a) \quad \begin{cases} \rho = \dfrac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\[2ex] \quad = \dfrac{\left[\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\dfrac{d^2f}{dy^2} - 2\dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{df}{dy}\,\dfrac{d^2f}{dx\,dy} + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2\dfrac{d^2f}{dx^2}}, \end{cases}$$

$$(b) \quad \rho = \frac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}} = \frac{\left[u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

$$(c) \quad \rho = \frac{ds}{d\varepsilon} = p + \frac{d^2p}{d\varepsilon^2} = r\frac{dr}{dp}.$$

(N° **272**.)

Les quantités p et r se rapportant à un point d'une courbe, p_1 et r_1 au point correspondant de la développée, on a

$$(d) \quad r_1^2 = r^2 + \rho^2 - 2p\rho, \quad p_1^2 = r^2 - p^2.$$

$$(e) \quad 6 - y = \frac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}, \quad \alpha - x = -\frac{dy}{dx}\,\frac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Si ω désigne l'angle des axes, on a

$$(f) \quad \rho = \frac{\left[1 + 2\cos\omega\,\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}\sin\omega}.$$

261. On tire immédiatement de l'équation

$$y' = \frac{p+qx}{y}, \quad 1+y'^2 = \frac{y^2(1+q)+p^2}{y^2}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Par suite,

$$\rho = \frac{[y^2(1+q)+p^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

On a ensuite

$$\beta - y = -y\frac{y^2(1+q)+p^2}{p^2};$$

d'où

$$(1) \qquad y = \left(\frac{p^2 6}{1+q}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

De plus,

$$\alpha - x = (p+qx)\frac{y^2(1+q)+p^2}{p^2},$$

ce qui donne

$$p+qx = \frac{p^2(p+q\alpha)}{(1+q)(qy^2+p^2)},$$

et comme l'équation proposée peut s'écrire

$$qy^2 = (p+qx)^2 - p^2,$$

il en résulte

$$(1+q)^2(qy^2+p^2)^3 = p^4(p+q\alpha)^2;$$

ou bien, en tenant compte de la relation (1),

$$(2) \qquad \left(\frac{p+q\alpha}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - q\left(\frac{6}{p}\right)^{\frac{2}{3}} = (1+q)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour $q = 0$, l'équation (2) se réduit à une identité; mais en la mettant sous la forme

$$\left(\frac{p+q\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + (1+q)^{\frac{1}{3}} = \frac{q\left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{p+q\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{3}} - (1+q)^{\frac{1}{3}}},$$

et prenant la vraie valeur du second membre pour $q = 0$, on trouve

$$6^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3,$$

équation connue de la développée de la parabole.

262. $\rho^2 = \frac{(2a + 3x)^3}{3a^2}$.

$$\alpha = -\left(x + \frac{3x^2}{2a}\right), \quad 6 = 4(a + x)\left(\frac{x}{3a}\right)^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$81a6^2 = 16\left[2a \pm (a^2 - 6a\alpha)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\pm (a^2 - 6a\alpha)^{\frac{1}{2}} - a\right].$$

La parabole semi-cubique est la première courbe qui ait été rectifiée. Cette rectification fut trouvée presque en même temps par Van Heuraet, Neil et Fermat.

263. $y' = \frac{(3a - x)^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}, \quad y'' = \frac{3a^2 x^{-\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{5}{2}}};$

de là

$$\rho = \frac{a(8a - 3x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{3(2a - x)^2},$$

et

$$4096a^3\alpha + 1152a^2 6^2 + 27 6^4 = 0.$$

264. $\alpha = x + 3(xy^2)^{\frac{1}{3}}, \quad 6 = y + 3(x^2y)^{\frac{1}{3}};$

d'où

$$\rho^2 = 9(axy)^{\frac{2}{3}},$$

puis

$$\alpha + 6 = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$\alpha - 6 = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

et enfin

$$(\alpha + 6)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - 6)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

265. $\rho = \dfrac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}.$

$$6 = \frac{a\left(2e^{\frac{2x}{a}} + 1\right)}{e^{\frac{x}{a}}}, \quad \alpha = x - a\left(e^{\frac{2x}{a}} + 1\right);$$

d'où

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{6 \pm (6^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}, \quad \frac{x}{a} = \log \frac{6 \pm (6^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a},$$

et enfin

$$\alpha = a \log \frac{6 \pm (6^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a} - \frac{6^2 + 4a^2 \pm 6\,(6^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{8a}.$$

Huyghens a donné à cette courbe le nom qu'elle porte.

266. $\rho = \dfrac{y^2}{a}.$

$$6 = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\alpha = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right),$$

d'où

$$\alpha = a \log \frac{6 \pm (6^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} \pm \frac{6\,(6^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}.$$

La chaînette est la courbe que figure un fil homogène pesant, flexible et inextensible, et dont les extrémités sont fixes.

267. $\rho = \dfrac{a(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}.$

$$6 = \frac{a^2}{y}, \quad \alpha = -a \log \frac{a + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y},$$

d'où

$$6 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{\alpha}} + e^{-\frac{a}{\alpha}}\right).$$

La chaînette est donc la développée de la tractrice.

Dans cette dernière courbe, la portion de tangente comprise entre le point de contact et l'axe des x est constante, propriété qui lui a fait donner le nom de *courbe aux tangentes égales*.

268. En faisant usage des formules (c) et (d) de ce paragraphe, et posant

$$\frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = m,$$

on a

$$p = mr, \quad \rho = \frac{r}{m}, \quad p_1 = mr_1.$$

Il en résulte que la développée est une spirale logarithmique égale à la proposée; elle se confond d'ailleurs avec le lieu des extrémités de la sous-normale polaire.

La spirale logarithmique peut être à elle-même sa développée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'extrémité du rayon r_1 aboutisse à la courbe. On doit donc avoir en même temps, puisque les deux rayons r et r_1 sont perpendiculaires,

$$r = ae^{\frac{\theta}{\alpha}}, \quad r_1 = ae^{\frac{\theta}{\alpha} + \frac{\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha}}.$$

Comme on a de plus $r = \alpha r_1$, la condition cherchée revient

à celle-ci :

$$\alpha = e^{\frac{(4k+1)\pi}{2\alpha}} \quad \text{ou} \quad \alpha^{\alpha} = e^{\frac{(4k+1)\pi}{2}}.$$

Il faut et il suffit qu'on puisse déterminer un nombre entier k satisfaisant à cette équation.

Cette courbe se reproduit de plusieurs autres manières. Sa développante, ses caustiques par réflexion et par réfraction en supposant le point lumineux au pôle, le lieu du pôle d'une spirale roulant sur une spirale fixe égale, sont des courbes égales à la proposée. Ces propriétés remarquables ont excité l'admiration de Jacques Bernoulli. Il la nomme en effet *spira mirabilis*, et la regarde comme le type de la constance, le symbole de la résurrection. Voici le curieux passage où il donne carrière à son enthousiasme :

« Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque » admirabilem mire mihi placeat spira hæc mirabilis, sic » ut ejus contemplatione satiari vix queam, cogitavi illam » ad res varias symbolice repræsentandas non inconcinne » adhiberi posse. Quoniam enim semper similem et eamdem spiram gignit, utcumque volvatur, evolvatur, radiet, hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia » similis emblema : *simillima filia matri*.... Aut, si mavis, quia curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero eadem, » poterit esse vel fortitudinis et constantiæ in adversitatibus, vel etiam carnis nostræ, post varias alterationes et » tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturæ symbolum ; adeo quidem ut si Archimedem » imitandi hodienum consuetudo obtineret, libenter spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum epigraphe : » *Eadem mutata resurget.* » (*Acta eruditorum*, ann. 1692, p. 212.)

Descartes s'est occupé le premier de la spirale logarith-

mique. Il la définit par la propriété que possède le rayon vecteur de faire un angle constant avec la tangente.

269. Soit φ l'angle du rayon vecteur avec la tangente en un point de la courbe; l'équation revient à celle-ci :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a};$$

par suite,

(1) $$p = r\sin\varphi = (r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}},$$

et, en vertu de la formule (*c*), p. 162,

(2) $$\rho^2 = r^2 - a^2.$$

Rapprochant ces résultats des formules (*d*), il vient

$$p_1 = r_1$$

pour l'équation de la développée, laquelle est évidemment un cercle.

On reconnaît d'ailleurs, dans l'équation proposée, l'équation différentielle de la développante du cercle.

270. L'équation de la courbe étant

$$r^2 = a^2\cos 2\theta,$$

et aussi

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

on trouve d'abord

$$\rho = \frac{a^2}{3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{3r} = \frac{a}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}};$$

puis

$$\beta = -\frac{y(a^2 - x^2 - y^2)}{3(x^2+y^2)} = -\frac{2a\sin^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha = \frac{x(a^2 + x^2 + y^2)}{3(x^2+y^2)} = \frac{2a\cos^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$3\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2a.$$

Cette équation, débarrassée de radicaux, prend la forme

$$(4a^2+9\beta^2+9\alpha^2)^2\beta^2+\alpha^2[128a^4-81(\alpha^2+\beta^2)^2]\alpha^2\beta^2$$
$$+(4a^2-9\beta^2-9\alpha^2)^2\alpha^4=0.$$

271. L'épicycloïde étant représentée par les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta, \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta, \end{cases}$$

on en tire

$$\frac{dx}{d\theta}=2(a+b)\cos\frac{a+2b}{2b}\theta\sin\frac{a\theta}{2b},$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2(a+b)\sin\frac{a+2b}{2b}\theta\sin\frac{a\theta}{2b},$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{tang}\,\frac{a+2b}{2b}\theta,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a+2b}{4b(a+b)}\,\frac{1}{\cos^3\dfrac{a+2b}{2b}\theta\sin\dfrac{a\theta}{2b}}.$$

Par suite,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1+y'^2}{y''}=\dfrac{4b(a+b)}{a+2b}\cos\dfrac{a+2b}{2b}\theta\sin\dfrac{a\theta}{2b}=\beta-y, \\ -\dfrac{1+y'^2}{y''}y'=-\dfrac{4b(a+b)}{a+2b}\sin\dfrac{a+2b}{2b}\theta\sin\dfrac{a\theta}{2b}=\alpha-x. \end{cases}$$

De là et des équations (1) résultent les relations :

$$\rho=\frac{4b(a+b)}{a+2b}\theta\sin\frac{a\theta}{2b},$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha=\dfrac{ab}{a+2b}\left(\dfrac{a+b}{b}\cos\theta+\cos\dfrac{a+b}{b}\theta\right), \\ \beta=\dfrac{ab}{a+2b}\left(\dfrac{a+b}{b}\sin\theta+\sin\dfrac{a+b}{b}\theta\right). \end{cases}$$

Il suffirait de remplacer b par $-b$ pour avoir les formules qui conviennent à l'hypocycloïde.

Les équations (3) représentent la développée demandée. On voit qu'elle est aussi une courbe du genre épicycloïde. En changeant d'axes rectangulaires sans déplacer l'origine, on peut mettre les équations (3) sous la forme des équations (1).

272. 1° De l'équation évidente

$$p = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

on tire

$$dp = (x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, d\alpha,$$

$$\frac{d^2 p}{d\alpha^2} = -p + \cos \alpha\, dx + \sin \alpha\, dy.$$

Or,

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \rho = \frac{ds}{d\alpha},$$

donc

$$\rho = p + \frac{d^2 p}{d\alpha^2}.$$

2° Pour obtenir la relation $\rho = \frac{rdr}{dp}$, il suffit de différentier l'équation

$$p = \frac{r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

et de comparer le résultat à la formule (b) de ce paragraphe.

273. La relation (1) se ramène à celle-ci :

$$2a \frac{dr}{ds} = \frac{b^2 + y^2}{y^2},$$

où le premier membre peut être regardé comme précédé du signe $\pm$.

Or la valeur de ρ [formule (a), p. 162] peut s'écrire

$$\rho = -\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy},$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2}.$$

On a d'ailleurs, N étant la longueur de la normale,

$$N = y\frac{ds}{dx};$$

d'où

$$N = \frac{2ay^2}{y^2 + b^2},$$

et par suite

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}.$$

L'équation proposée appartient à la courbe décrite par l'un des foyers d'une ellipse qui roule sans glisser sur l'axe des x (Delaunay, *Journal de Liouville*, t. VI). Cette courbe jouit aussi de la propriété d'engendrer, par sa révolution autour du même axe, la surface minimum qui renferme un volume donné.

274. La condition du maximum ou du minimum est exprimée par l'équation

$$\frac{d\rho}{dx} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy^3}{dx^3}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0.$$

D'ailleurs, l'équation du cercle osculateur étant

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = \rho^2,$$

on a

$$(\mathrm{X}-x)+(\mathrm{Y}-y)\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}=0,$$

(2) $$1+\left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^2+(\mathrm{Y}-y)\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}=0,$$

(3) $$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Différentiant l'équation (3) par rapport à X, il vient

$$3\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}+(\mathrm{Y}-y)\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^3}=0,$$

et, à cause des relations (2) et (3),

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}-\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

275. L'équation proposée peut s'écrire

(1) $$\sum\frac{a}{\delta}=\frac{m}{\Delta},$$

en supposant les courbes rapportées à des coordonnées polaires dont O est le pôle, et désignant par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \Delta$ les rayons vecteurs des points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, M.

Les quantités δ ainsi que Δ sont des fonctions de l'angle que fait la transversale avec l'axe polaire; en différentiant deux fois l'équation (1) par rapport à cet angle, il vient

(2) $$\sum\frac{a(\delta\delta''-2\delta'^2)}{\delta^3}=\frac{m(\Delta\Delta''-2\Delta'^2)}{\Delta^3}.$$

D'un autre côté,

$$\cos\alpha=\frac{\delta}{(\delta^2+\delta'^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{1}{\rho}=\frac{\delta^2+2\delta'^2-\delta\delta''}{(\delta^2+\delta'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où

$$\frac{1}{\rho\cos^3\alpha}=\frac{\delta^2+2\delta'^2-\delta\delta''}{\delta^3};$$

de même,

$$\frac{1}{R\cos^3\mu} = \frac{\Delta' + 2\Delta'^2 - \Delta\Delta''}{\Delta^3}.$$

Donc, en tenant compte des équations (1) et (2),

$$\sum \frac{a}{\rho\cos^3\alpha} = \sum \frac{a}{\delta} + \sum a\,\frac{2\delta'^2 - \delta\delta''}{\delta^3} = \frac{m}{R\cos^3\mu}.$$

C. Q. F. D.

§ XIV. — *Géométrie à trois dimensions.*

Notations et formules. — En un point m (x, y, z) d'une courbe on peut concevoir trois lignes droites rectangulaires entre elles, savoir : la tangente, la normale principale et la perpendiculaire au plan osculateur. Sur chacune d'elles il existe deux directions différentes : l'une est définie par les cosinus des angles que fait cette droite avec les directions positives des axes coordonnés, et la direction opposée par ces mêmes cosinus changés de signe. Pour abréger, nous appellerons *cosinus directeurs* d'une droite ou d'une direction quelconque ceux qui définissent ainsi une direction déterminée; et ces mots : *la direction* (a, b, c), désigneront celle d'une droite ayant a, b, c pour cosinus directeurs. On pourra même substituer à ces cosinus des quantités qui leur seront proportionnelles.

Quelques-uns des résultats exprimés par les formules qui suivent seront démontrés dans ce paragraphe.

a, b, c, cosinus directeurs de la tangente;
λ, μ, ν, cosinus directeurs de la normale principale;
α, β, γ, cosinus directeurs de l'*axe* du plan osculateur, ou simplement de l'*axe*;
ω, angle de contingence ou première flexion;
u, angle de torsion ou seconde flexion;
ρ, rayon de courbure; r, rayon de la seconde courbure.

$$(a)\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1, & \alpha^2+6^2+\gamma^2=1; \\ a\alpha+b6+c\gamma=0, & a\lambda+b\mu+c\nu=0, & \alpha\lambda+6\mu+\gamma\nu=0. \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} \alpha=b\nu-c\mu, & 6=c\lambda-a\nu, & \gamma=a\mu-b\lambda; \\ \lambda=6c-\gamma b, & \mu=\gamma a-\alpha c, & \nu=\alpha b-6a; \\ a=\mu\gamma-\nu 6, & b=\nu\alpha-\lambda\gamma, & c=\lambda 6-\mu\alpha. \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} a=\dfrac{dx}{ds}, \quad b=\dfrac{dy}{ds}, \quad c=\dfrac{dz}{ds}; \\ \lambda=\dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{\omega}, \quad \mu=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{\omega}, \quad \nu=\dfrac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{\omega}; \\ \alpha=\dfrac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{\omega^2 ds}, \quad 6=\dfrac{dz\,d^2x-dx\,d^2z}{\omega^2 ds}, \quad \gamma=\dfrac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{\omega^2 ds}. \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}=\dfrac{\omega}{ds}=\dfrac{\left[\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{ds} \\ \quad =\dfrac{[(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}}{ds^3}. \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} \dfrac{1}{r}=\dfrac{u}{ds} \\ \quad =\dfrac{dx(d^2y\,d^3z-d^2z\,d^3y)+dy(d^2z\,d^3x-d^2x\,d^3z)+dz(d^2x\,d^3y-d^2y\,d^3x)}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,dz^2)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}. \end{cases}$$

(N° 278.)

$$(f)\quad \lambda=\frac{da}{\omega}=-\frac{d\alpha}{u}, \quad \mu=\frac{db}{\omega}=-\frac{d6}{u}, \quad \nu=\frac{dc}{\omega}=-\frac{d\gamma}{u}. \qquad \textbf{(N° 277.)}$$

$$(g)\quad d\lambda=\alpha u-a\omega, \quad d\mu=6u-b\omega, \quad d\nu=\gamma u-c\omega. \qquad \textbf{(N° 279.)}$$

Les formules (*f*) jouent un rôle assez important dans l'étude des courbes à double courbure. On peut remar-

quer que l'une quelconque des égalités

$$(h)\qquad \frac{da}{\omega} = -\frac{d\alpha}{u},\quad \frac{db}{\omega} = -\frac{d\beta}{u},\quad \frac{dc}{\omega} = -\frac{d\gamma}{u}\ (^*)$$

n'est que l'expression analytique de ce théorème :

Le rapport des flexions d'une courbe en un point est égal au rapport des accroissements que subisseut, en passant de ce point à un point infiniment voisin, les cosinus des angles d'une droite quelconque avec la tangente et l'axe du plan osculateur.

276. 1° Soient x, y, z les coordonnées d'un point m de la droite D; x_1, y_1, z_1 celles d'un point m_1 de la droite D_1, et posons

$$(1)\qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = h,$$

$$(2)\qquad \frac{x_1-a_1}{\alpha_1} = \frac{y_1-b_1}{\beta_1} = \frac{z_1-c_1}{\gamma_1} = h_1.$$

La condition du minimum donne la relation

$$(x-x_1)\,dx + (y-y_1)\,dy + (z-z_1)\,dz$$
$$= (x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1.$$

D'ailleurs,

$$dx = \alpha\,dh,\qquad dy = \beta\,dh,\qquad dz = \gamma\,dh,$$
$$dx_1 = \alpha_1\,dh_1,\quad dy_1 = \beta_1\,dh_1,\quad dz_1 = \gamma_1\,dh_1;$$

(*) Ces formules sont quelquefois désignées sous le nom de *formules de M. Serret*, comme on le voit dans le *Traité de Calcul différentiel* dû à M. Bertrand. C'est là une dénomination erronée. Le théorème cité dans le texte, et qui, sauf la notation algébrique, est identique aux formules (h), a été donné en 1847 par l'auteur du présent *Recueil d'Exercices;* tandis que l'extrait d'une Lettre à M. Liouville, où M. Serret fait connaître les mêmes formules, n'a paru que trois ans plus tard. (MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, édition Liouville.) De plus, les formules elles-mêmes et plusieurs de leurs conséquences se trouvaient, dès la fin de 1847, entre les mains de l'illustre rédacteur du *Journal de Mathématiques*. (*Voir* les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1864, p. 284.)

d'où, à cause de l'indépendance de h et h_1,

$$(3) \qquad (x-x_1)\alpha + (y-y_1)\beta + (z-z_1)\gamma = 0,$$

$$(4) \qquad (x-x_1)\alpha_1 + (y-y_1)\beta_1 + (z-z_1)\gamma_1 = 0.$$

Ces équations expriment que la ligne mm_1 est perpendiculaire à chacune des droites données. On en tire

$$(5) \qquad \frac{x-x_1}{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1} = \frac{y-y_1}{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1} = \frac{z-z_1}{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1}.$$

La valeur commune de ces rapports est

$$\frac{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}}{\sqrt{(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2+(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2+(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2}} = \frac{\pm\delta}{\sin V},$$

en désignant par δ la plus courte distance, et par V l'angle des deux droites.

Il résulte de là que les valeurs p, q, r des *cosinus directeurs* de l'une des directions de la plus courte distance sont données par les formules

$$(6) \quad p = \frac{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1}{\sin V}, \quad q = \frac{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1}{\sin V}, \quad r = \frac{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1}{\sin V}.$$

2° On déduit des équations (5) et (6)

$$x-x_1 = \pm p\delta, \quad y-y_1 = \pm q\delta, \quad z-z_1 = \pm r\delta,$$

et par suite,

$$(7) \quad \delta(p^2+q^2+r^2) = \delta = \pm[p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)].$$

D'un autre côté,

$$(8) \qquad \begin{cases} x-x_1 = a-a_1+\alpha h-\alpha_1 h_1, \\ y-y_1 = b-b_1+\beta h-\beta_1 h_1, \\ z-z_1 = c-c_1+\gamma h-\gamma_1 h_1, \end{cases}$$

d'où

$$p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)=p(a-a_1)+q(b-b_1)+r(c-c_1),$$

en tenant compte des relations évidentes

$$(9) \qquad p\alpha+q\beta+r\gamma=0, \quad p\alpha_1+q\beta_1+r\gamma_1=0.$$

Les équations (7) et (9) donnent enfin

$$\delta=\pm[p(a-a_1)+q(b-b_1)+r(c-c_1)],$$

c'est-à-dire

$$\delta=\pm\frac{(a-a_1)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)+(b-b_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)+(c-c_1)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)}{\sin V},$$

où l'on peut concevoir $\sin V$ remplacé par sa valeur

$$\sqrt{(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2+(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2+(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2}.$$

3° Pour le calcul des coordonnées des points m et m_1, il suffit de déterminer h et h_1. Or, si l'on multiplie respectivement par α, β, γ les équations (8) et qu'on ajoute les résultats, il vient

$$0=\alpha(a-a_1)+\beta(b-b_1)+\gamma(c-c_1)+h-h_1\cos V.$$

On trouverait semblablement

$$0=\alpha_1(a-a_1)+\beta_1(b-b_1)+\gamma_1(c-c_1)+h\cos V-h_1,$$

d'où

$$h\sin^2 V=(a-a_1)(\alpha_1\cos V-\alpha)+(b-b_1)(\beta_1\cos V-\beta)$$
$$+(c-c_1)(\gamma_1\cos V-\gamma).$$

Observant que le binôme $\alpha_1\cos V-\alpha$ peut être mis sous la forme

$$\alpha_1(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\alpha=\gamma_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)-\beta_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)$$
$$=\sin V(q\gamma_1-r\beta_1),$$

il vient

$$h = \frac{(a-a_1)(q\gamma_1 - r\beta_1) + (b-b_1)(r\alpha_1 - p\gamma_1) + (c-c_1)(p\beta_1 - q\alpha_1)}{\sin V}.$$

On obtiendrait pour h_1 une formule tout à fait semblable.

L'analogie des expressions h et δ est manifeste. Elle tient précisément à cette circonstance, facile à reconnaître par la Géométrie, que la longueur $h \sin V$ est la plus courte distance de la droite D_1 et d'une parallèle à la perpendiculaire commune, menée par le point (a, b, c).

277. Démontrons d'abord que la droite dont la direction est définie par les cosinus $\frac{d\alpha}{u}$, $\frac{d\beta}{u}$, $\frac{d\gamma}{u}$ est perpendiculaire à la fois à la tangente et à l'axe du plan osculateur. Il suffit, pour cela, d'établir les relations

$$a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma = 0,$$
$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0;$$

or, la dernière résulte évidemment de

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et la première de celle qu'on obtient en différentiant la suivante,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

et remarquant qu'on a

$$\alpha\,da + \beta\,db + \gamma\,dc = 0,$$

à cause des équations (1).

Il suit de là que l'on peut poser

$$\lambda = \pm\frac{d\alpha}{u}, \quad \mu = \pm\frac{d\beta}{u}, \quad \nu = \pm\frac{d\gamma}{u},$$

mais il est permis de donner à l'angle de torsion un signe

tel, que ces relations coïncident avec les équations (2). Sous cette forme, elles reproduisent l'expression habituelle de l'angle de torsion [formule (e), p. 174].

278. Ces équations donnent

$$u = -(\lambda d\alpha + \mu d\beta + \nu d\gamma) = \alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu.$$

De la relation

$$\lambda = \frac{da}{\omega} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{\omega\,ds^2}$$

on tire

$$\omega ds^2 . d\lambda + \lambda d(\omega ds^2) = ds\,d^3x - dx\,d^3s;$$

on aurait aussi

$$\omega ds^2 d\mu + \mu d(\omega ds^2) = ds\,d^3y - dy\,d^3s,$$
$$\omega ds^2 d\nu + \nu d(\omega ds^2) = ds\,d^3z - dz\,d^3s.$$

Si l'on multiplie par α la première de ces équations, par β la seconde, par γ la troisième, et qu'on ajoute les résultats, il vient

$$\omega ds\, u = \alpha d^3x + \beta d^3y + \gamma d^3z.$$

Remplaçant dans cette relation α par $\dfrac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{\omega ds}$, β et γ par des expressions analogues, on trouve la formule connue.

279. En un point M d'une courbe, la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur déterminent trois plans qui forment huit angles trièdres tri-rectangles. Les arêtes de l'un de ces trièdres sont parfaitement définies par les *cosinus directeurs* a, b, c; λ, μ, ν; α, β, γ entre lesquels on a les relations

$$(2) \qquad \alpha = b\nu - c\mu, \quad \lambda = \beta c - \gamma b, \quad a = \mu\gamma - \nu\beta,$$

et six autres qu'il est inutile d'écrire (p. 174).

Cela posé, on a par la différentiation

$$d\lambda = \beta dc - \gamma db + c d\beta - b d\gamma.$$

Or, d'après les formules (f) de la page 174,

$$dc = \omega\nu, \quad db = \omega\mu, \quad d\beta = -u\mu, \quad d\gamma = -u\nu;$$

par suite,

$$d\lambda = u(b\nu - c\mu) - \omega(\mu\gamma - \nu\beta),$$

et, à cause des relations (b), p. 174,

$$d\lambda = \alpha u - a\omega.$$

On obtiendrait de la même manière les valeurs de $d\mu$ et de $d\nu$. Si θ désigne l'angle de deux normales principales consécutives, on trouve

(3) $$\theta^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = u^2 + \omega^2,$$

puisqu'on a

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

La relation (3) est due à Lancret.

280. Si l'on convient de représenter les quantités relatives à M_1 par les lettres adoptées pour les quantités analogues qui se rapportent à M, en les accompagnant de l'indice 1, on a

$$x_1 - x = \rho\lambda, \quad y_1 - y = \rho\mu, \quad z_1 - z = \rho\nu;$$

d'où

$$dx_1 = dx + \rho d\lambda + \lambda d\rho,$$
$$dy_1 = dy + \rho d\mu + \mu d\rho,$$
$$dz_1 = dz + \rho d\nu + \nu d\rho;$$

ou bien, en remplaçant $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ par leurs valeurs (n° 279),

$$a_1 ds_1 = \alpha\rho u + \lambda d\rho, \quad b_1 ds_1 = \beta\rho u + \mu d\rho, \quad c_1 ds_1 = \gamma\rho u + \nu d\rho.$$

Il en résulte

(1) $$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$

(2) $$\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = \frac{d\rho}{ds_1},$$

(3) $$\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = \frac{\rho u}{ds_1},$$

et par suite

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \rho^2 u^2.$$

Les équations (1), (2) et (3) montrent que la tangente au lieu des centres de courbure est dans le plan normal de la courbe donnée, et fait avec la normale principale au point M un angle dont la tangente est $\frac{\rho u}{d\rho}$. Cet angle n'est égal à zéro, en général, que pour les courbes planes.

Par suite d'un calcul incomplet, Lagrange avait été conduit à ce résultat que le lieu des centres de courbure peut avoir pour tangentes les normales principales de la courbe (*Fonctions analytiques*). Cette assertion inexacte ne lui serait pas échappée, comme l'a fait voir M. Poinsot, s'il eût poussé ses calculs un peu plus loin.

281. Le plan rectifiant au point (x, y, z) a pour équation (p. 173)

(1) $$(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0.$$

En la combinant avec celle-ci,

$$(X - x)d\lambda + (Y - y)d\mu + (Z - z)d\nu = \lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0,$$

on en conclut les équations de la droite rectifiante, qui sont

$$\frac{X - x}{\mu d\nu - \nu d\mu} = \frac{Y - y}{\nu d\lambda - \lambda d\nu} = \frac{Z - z}{\lambda d\mu - \mu d\lambda}.$$

Remarquant qu'on a [formules (*b*) et (*g*), p. 174]

$$\mu d\nu - \nu d\mu = \mu(\gamma u - c\omega) - \nu(6u - b\omega) = au + \alpha\omega,$$

et des expressions analogues pour les autres dénominateurs, on met ces équations sous la forme

$$\frac{X - x}{au + \alpha\omega} = \frac{Y - y}{bu + 6\omega} = \frac{Z - z}{cu + \gamma\omega},$$

d'où résulte que les cosinus directeurs de la rectifiante

sont

$$\frac{au + \alpha\omega}{\sqrt{u^2+\omega^2}}, \quad \frac{bu + 6\omega}{\sqrt{u^2+\omega^2}}, \quad \frac{cu + \gamma\omega}{\sqrt{u^2+\omega^2}};$$

par suite, cette droite fait avec la tangente un angle dont le cosinus est égal à $\frac{u}{\sqrt{u^2+\omega^2}}$. Si donc on prend sur cette tangente à partir du point M une longueur $MA = \rho$, et qu'on mène par le point A une parallèle à l'axe du plan osculateur, cette parallèle rencontre la rectifiante en un point B tel, qu'on a

$$AB = \frac{ds}{u} = r.$$

282. Le plan normal au point (x, y, z) de la courbe a pour équation (p. 173)

$$(1) \qquad (X - x)a + (Y - y)b + (Z - z)c = N = 0,$$

et la recherche des coordonnées du centre de la sphère osculatrice revient à déterminer les valeurs de X, Y, Z qui satisfont au système

$$(2) \qquad N = 0, \quad dN = 0, \quad d^2N = 0,$$

les différentielles étant prises par rapport à une variable indépendante dont toutes les autres variables sont des fonctions. La seconde équation de ce système prend la forme

$$(3) \qquad (X - x)\frac{da}{ds} + (Y - y)\frac{db}{ds} + (Z - z)\frac{dc}{ds} = 1,$$

et la troisième revient à

$$(4) \qquad (X - x)d\frac{da}{ds} + (Y - y)d\frac{db}{ds} + (Z - z)d\frac{dc}{ds} = 0.$$

Les équations (1) et (4) donnent immédiatement

$$\frac{X - x}{bd\frac{dc}{ds} - cd\frac{db}{ds}} = \frac{Y - y}{cd\frac{da}{ds} - ad\frac{dc}{ds}} = \frac{Z - z}{ad\frac{db}{ds} - bd\frac{da}{ds}},$$

ou

$$\frac{X-x}{d\left(\frac{bdc-cdb}{ds}\right)}=\frac{Y-y}{d\left(\frac{cda-adc}{ds}\right)}=\frac{Z-z}{d\left(\frac{adb-bda}{ds}\right)}.$$

Or on a [formules (f), p. 174]

$$\frac{bdc-cdb}{ds}=\frac{b\nu-c\mu}{\rho}=\frac{\alpha}{\rho};$$

$$d\frac{\alpha}{\rho}=\frac{\rho d\alpha-\alpha d\rho}{\rho^2}=-\frac{\rho u\lambda+\alpha d\rho}{\rho^2}.$$

De là, et d'autres transformations analogues, on conclut

$$\frac{X-x}{\rho u\lambda+\alpha d\rho}=\frac{Y-y}{\rho u\mu+6d\rho}=\frac{Z-z}{\rho u\nu+\gamma d\rho}$$

$$=\frac{(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu}{\rho u}.$$

Or, l'équation (3) peut s'écrire

$$(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=\rho;$$

par suite,

$$X-x=\rho\lambda+r\frac{d\rho}{ds}\alpha,$$

$$Y-y=\rho\mu+r\frac{d\rho}{ds}6,$$

$$Z-z=\rho\nu+r\frac{d\rho}{ds}\gamma;$$

et si l'on désigne par R le rayon de la sphère osculatrice, on a

$$R^2=\rho^2+\frac{r^2d\rho^2}{ds^2}.$$

283. D'après les formules (f), p. 174, on a

$$\frac{da}{d\alpha}=\frac{db}{d6}=\frac{dc}{d\gamma}=-\frac{\omega}{u}=m,$$

en désignant par m une constante.

D'où, en intégrant,

$$a = m\alpha + A, \quad b = m\beta + B, \quad c = m\gamma + C,$$

et, par suite,

$$a^2 + b^2 + c^2 = m(a\alpha + b\beta + c\gamma) + Aa + Bb + Cc,$$

équation qui se réduit à

$$A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} + C\frac{dz}{ds} = 1,$$

et montre que la tangente en chaque point de la courbe fait un angle constant avec une droite fixe dont les *cosinus directeurs* sont proportionnels à A, B, C. C'est la propriété caractéristique de l'hélice tracée sur un cylindre à base quelconque.

284. Les formules (f) de la page 174 donnent les relations

$$\rho\frac{da}{ds} + r\frac{d\alpha}{ds} = 0,$$

$$\rho\frac{db}{ds} + r\frac{d\beta}{ds} = 0,$$

$$\rho\frac{dc}{ds} + r\frac{d\gamma}{ds} = 0;$$

d'où, en désignant par A, B, C des constantes arbitraires,

$$(1) \qquad \rho a + r\alpha = A, \quad \rho b + r\beta = B, \quad \rho c + r\gamma = C.$$

On déduit de là sans difficulté

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0, \quad Aa + Bb + Cc = \rho, \quad A\alpha + B\beta + C\gamma = r.$$

Ces dernières équations montrent qu'il existe une droite fixe, perpendiculaire à la normale principale de la courbe, et faisant des angles constants avec la tangente et l'axe du plan osculateur. Les *cosinus directeurs* de cette droite sont

proportionnels à A, B, C, et si l'on suppose qu'elle soit prise pour l'axe des z, on a

$$A = 0, \quad B = 0,$$

d'où résulte

$$(2) \qquad \rho a + r\alpha = 0, \quad \rho b + r\beta = 0, \quad \nu = 0.$$

On trouve aussi c constant, ce qui devait être (n° 283). Si l'on observe qu'en général

$$\alpha = b\nu - c\mu, \quad \beta = c\lambda - a\nu,$$

les équations (2) nous donnent

$$\rho a = cr\mu, \quad \rho b = -cr\lambda,$$

ou bien

$$a = cr\frac{db}{ds}, \quad b = -cr\frac{da}{ds},$$

ou enfin

$$dx = crd\frac{dy}{ds}, \quad dy = -crd\frac{dx}{ds}.$$

On tire immédiatement de là, en désignant par x_0 et y_0 deux constantes arbitraires,

$$x - x_0 = cr\frac{dy}{ds}, \quad y - y_0 = -cr\frac{dx}{ds},$$

et par suite,

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy = 0;$$

par conséquent,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \text{const.},$$

équation qui représente un cylindre à base circulaire.

285. Désignons toutes les quantités qui se rapportent au point M_1 de la deuxième courbe par les mêmes lettres adoptées pour les quantités relatives au point M, en les accompagnant de l'indice 1. On a (p. 173)

$$x_1 - x = h\lambda, \quad y_1 - y = h\mu, \quad z_1 - z = h\nu.$$

On en tire

$$dx_1 = dx + h d\lambda, \quad dy_1 = dy + h d\mu, \quad dz_1 = dz + h d\nu,$$

ou bien

$$a_1 ds_1 = a ds + h d\lambda, \quad b_1 ds_1 = b ds + h d\mu, \quad c_1 ds_1 = c ds + h d\nu.$$

Il en résulte

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 = \frac{ds - h\omega}{ds_1}.$$

Telle est la valeur du cosinus de l'angle que fait la tangente en M_1 avec la tangente en M. Quant au cosinus de l'angle que la première tangente fait avec la normale principale en M, il est égal à zéro, puisqu'on a

$$\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = h(\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu).$$

On trouve enfin, pour le cosinus du troisième angle cherché,

$$\alpha a_1 + 6 b_1 + \gamma c_1 = \frac{hu}{ds_1}.$$

D'ailleurs, la somme des carrés de ces trois cosinus doit être égale à 1 ; d'où résulte

$$ds_1 = \sqrt{(ds - h\omega)^2 + h^2 u^2} = ds\left[\left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

286. 1° Conservant les mêmes notations que dans le précédent numéro, il faut et il suffit que la tangente en M_1 soit perpendiculaire au plan normal en M, ce qui exige qu'on ait

$$\alpha a_1 + 6 b_1 + \gamma c_1 = hu,$$

ou bien

$$u = 0,$$

c'est-à-dire que la courbe soit plane.

2° Les *cosinus directeurs* de la normale principale en M_1

sont

$$\frac{da_1}{\omega_1}, \quad \frac{db_1}{\omega_1}, \quad \frac{dc_1}{\omega_1};$$

il faut et il suffit que sa direction soit perpendiculaire au plan *rectifiant* en M (nº 281), ce qui conduit à chercher la valeur du trinôme

$$\alpha\, da_1 + 6\, db_1 + \gamma\, dc_1.$$

Or, on a (nº 285)

$$\alpha a_1 + 6 b_1 + \gamma c_1 = \frac{hu}{ds};$$

par suite,

$$\alpha\, da_1 + 6 db_1 + \gamma\, dc_1 + a_1 d\alpha + b_1 d6 + c_1 d\gamma = d\left(\frac{hu}{ds_1}\right);$$

et en vertu des relations

$$d\alpha = -\lambda u, \quad d6 = -\mu u, \quad d\gamma = -\nu u,$$

la dernière équation se réduit à

$$\alpha\, da_1 + 6 db_1 + \gamma\, dc_1 = d\left(\frac{hu}{ds_1}\right);$$

la condition cherchée est donc exprimée par

$$d\left(\frac{hu}{ds_1}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{h}{\rho} + \frac{k}{r} = 1,$$

k désignant une constante.

Ce résultat est dû à M. Bertrand.

287. 1º et 2º Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe qu'on peut appeler la *courbe directrice*; l, m, n les cosinus directeurs de la génératrice qui passe en M. Pour un point voisin sur la courbe, les quantités analogues

seront $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $l+\Delta l$, $m+\Delta m$, $n+\Delta n$. Les équations du n° 276 donnent immédiatement, pour les *cosinus directeurs* de la plus courte distance de deux génératrices dont l'angle est ν,

$$\frac{m\Delta n - n\Delta m}{\sin\nu}, \quad \frac{n\Delta l - l\Delta n}{\sin\nu}, \quad \frac{l\Delta m - m\Delta l}{\sin\nu},$$

et pour la plus courte distance elle-même,

$$\delta = \frac{\Delta x(m\Delta n - n\Delta m) + \Delta y(n\Delta l - l\Delta n) + \Delta z(l\Delta m - m\Delta l)}{\sin\nu}.$$

Les limites cherchées sont alors

$$\frac{mdn - ndm}{\nu}, \quad \frac{ndl - ldn}{\nu}, \quad \frac{ldm - mdl}{\nu},$$

$$\frac{\delta}{\nu} = \frac{dx(mdn - ndm) + dy(ndl - ldn) + dz(ldm - mdl)}{\nu^2},$$

où

$$\nu = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2}.$$

3° Soit h la distance du point M au point cherché M_1 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1; on a

$$x_1 - x = hl, \quad y_1 - y = h\mu, \quad z_1 - z = h\nu,$$

et par suite (n° 276, 3°),

$$h = -\frac{dx\,dl + dy\,dm + dz\,dn}{\nu^2}.$$

M. Chasles a donné au point M_1 le nom de *point central*.

Observons que la direction définie par les *cosinus directeurs* $\frac{dl}{\nu}$, $\frac{dm}{\nu}$, $\frac{dn}{\nu}$ est perpendiculaire à la fois à la génératrice en M et à la direction limite de la plus courte distance; il en résulte que le plan qui a pour équation

$$(X - x_1)\,dl + (Y - y_1)\,dm + (Z - z_1)\,dn = 0$$

contient la génératrice qui passe en M et la position limite de la plus courte distance. Il a été désigné par M. Bour sous le nom de *plan central.*

288. Si l'on pose $\frac{dx}{ds} = a$, $\frac{dy}{ds} = b$, $\frac{dz}{ds} = c$, et qu'on développe suivant la série de Taylor toutes les différences Δ qui entrent dans la formule qui donne δ (n° 287), l'arc s de la courbe directrice étant pris pour variable indépendante et Δs désignée par ε, on a

$$\Delta x = a\varepsilon + a' \frac{\varepsilon^2}{2} + a'' \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta l = l'\varepsilon + l'' \frac{\varepsilon^2}{2} + l''' \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et d'autres formules analogues pour Δy, Δz, Δm, Δn. Pour trouver ce que devient alors δ, il suffit, à cause de la symétrie des calculs, de considérer l'expression

$$\Delta x(m\Delta n - n\Delta m),$$

qui prend la forme

$$\varepsilon^2 a(mn' - nm') + \frac{\varepsilon^3}{2}\frac{d[a(mn' - nm')]}{ds} + \ldots;$$

par suite,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sin V}\left(\varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{dP}{ds} + \ldots\right),$$

où

$$P = a(mn' - nm') + b(nl' - ln') + c(lm' - ml').$$

Si cette quantité est nulle identiquement, $\frac{dP}{ds}$ l'est aussi, ce qui démontre le théorème énoncé.

289. En égalant à zéro la quantité P du numéro précédent, on a l'équation

$$(A)\quad dx(mdn - ndm) + dy(ndl - ldn) + dz(ldm - mdl) = 0.$$

Elle exprime que, pour toute surface réglée qui y satisfait, la direction définie par les binômes

$$mdn - ndm, \quad ndl - ldn, \quad ldm - mdl,$$

déjà perpendiculaire à la génératrice, l'est aussi à la courbe directrice au point M où cette courbe est rencontrée par la génératrice. C'est donc aussi la direction de la normale en M à la surface; et comme elle ne diffère pas de la direction limite de la plus courte distance de la génératrice considérée à la génératrice infiniment voisine, elle ne dépend nullement de la courbe directrice et demeure la même tout le long de la génératrice. On peut d'ailleurs reconnaître facilement que cette direction est perpendiculaire à toute courbe tracée sur la surface au point μ (ξ, η, ζ) où cette courbe rencontre la génératrice. On a en effet, en posant $M\mu = R$,

$$\xi - x = Rl, \quad \eta - y = Rm, \quad \zeta - z = Rn,$$

et par suite,

$$d\xi = dx + R\,dl + l\,dR, \quad d\eta = dy + R\,dm + m\,dR,$$
$$d\zeta = dz + R\,dn + n\,dR,$$

d'où l'on tire

$$d\xi(mdn - ndm) + d\eta(ndl - ldn) + d\zeta(ldm - mdl) = 0.$$

L'équation (A) caractérise les *surfaces développables* et peut leur servir de définition analytique.

290. Prenons un point μ (ξ, η, ζ) sur la génératrice qui passe en M, et désignons par R la distance μM. On a

$$d\xi - dx = R\,dl + l\,dR,$$
$$d\eta - dy = R\,d\mu + \mu\,dR,$$
$$d\zeta - dz = R\,d\nu + \nu\,dR,$$

et il s'agit de prouver qu'on peut déterminer le point μ de

telle sorte que les quantités $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ soient proportionnelles à l, m, n. Or, la direction l, m, n est perpendiculaire à celle de la plus courte distance, et aussi à l'axe du *plan central* (n° 287), dont les cosinus directeurs sont $\frac{dl}{v}$, $\frac{d\mu}{v}$, $\frac{d\nu}{v}$; il faut donc qu'on ait

$$d\xi\,(mdn + ndm) + d\eta\,(ndl + ldn) + d\zeta\,(ldm - mdl) = 0$$

et

$$d\xi\,dl + d\eta\,dm + d\zeta\,dn = 0.$$

On sait que la première équation est satisfaite (n° 289), et la seconde le sera également si l'on pose

$$R = -\frac{dx\,dl + dy\,dm + dz\,dn}{dl^2 + dm^2 + dn^2}.$$

Ce résultat démontre que les génératrices de la surface sont les tangentes du lieu des *points centraux* (n° 287), qui n'est ici autre chose que l'*arête de rebroussement* de la surface développable.

La réciproque du théorème se voit immédiatement.

291. Si l'on prend l'arête de rebroussement pour *courbe directrice* de la surface développable (n° 290), les cosinus l, m, n deviennent respectivement égaux à a, b, c (formules de la page 173). Or, l'axe du plan osculateur de l'arête de rebroussement est perpendiculaire à la direction (a, b, c) et à la direction (da, db, dc); la normale à la surface l'est également, puisqu'on a la relation

$$dx\,(mdn - ndm) + dy\,(ndl - ldn) + dz\,(ldm - mdl) = 0,$$

et l'identité

$$dl\,(mdn - ndm) + dm\,(ndl - ldn) + dn\,(ldm - mdl) = 0;$$

le théorème est donc démontré.

292. Outre l'équation (A) du n° 289, qui peut s'écrire

$$dl(bn-cm)+dm(cl-an)+dn(am-bl)=0,$$

on a

$$ldl+mdm+ndn=0,$$

d'où

$$\frac{dl}{m(am-bl)-n(cl-an)}=\frac{dm}{n(bn-cm)-l(an-bl)}$$
$$=\frac{dn}{l(cl-an)-m(bn-cm)}.$$

Or,

$$m(am-bl)-n(cl-an)=a-l(al+bm+cn)=a-l\cos\theta,$$

et les autres dénominateurs donnent des résultats semblables.

293. 1° Les équations générales du n° 292 deviennent ici

$$(1)\qquad \frac{dl}{a}=\frac{dm}{b}=\frac{dn}{c}=\sqrt{dl^2+dm^2+dn^2}.$$

Si l'on désigne par φ l'angle de la génératrice avec l'axe du plan osculateur au point M de la courbe directrice, on a

$$(2)\qquad l\alpha+m\beta+n\gamma=\cos\varphi,\quad \lambda l+\mu m+\nu n=\sin\varphi,$$

et par conséquent,

$$(3)\quad ld\alpha+md\beta+nd\gamma+\alpha dl+\beta dm+\gamma dn=-\sin\varphi d\varphi.$$

Transformant ce résultat au moyen des équations (1) et des formules connues,

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{\lambda}=\frac{d\beta}{\mu}=\frac{d\gamma}{\nu}=-u,$$

il vient

$$d\varphi=u.$$

Telle est la relation nécessaire qui régit les variations

de l'angle que fait la génératrice avec l'axe du plan osculateur.

2° La relation $d\varphi = u$ étant supposée exister, la surface est développable. En effet, si l'on en tient compte ainsi que des formules (2) et (4), l'équation (3) se réduit à

$$\alpha dl + 6 dm + \gamma dn = 0.$$

On a d'ailleurs

$$l dl + m dm + n dn = 0,$$

et par suite

$$\frac{dl}{m\gamma - n6} = \frac{dm}{n\alpha - l\gamma} = \frac{dn}{l6 - m\alpha}.$$

Or, la direction définie par les dénominateurs de ces rapports est celle d'une droite perpendiculaire à la génératrice et à l'axe du plan osculateur, c'est-à-dire celle de la tangente, ce qui conduit aux relations (1).

Les arêtes de rebroussement des surfaces développables définies par l'équation (5) sont dites *les développées* de la courbe directrice. Comme cette équation ne renferme que la différentielle de l'angle φ et non cet angle lui-même, il en résulte qu'une courbe à double courbure admet une infinité de développées. Si la courbe est plane, φ est une quantité constante.

294. 1° Désignons les quantités qui se rapportent à la caractéristique par les lettres affectées aux quantités analogues relatives à la courbe directrice, en les accompagnant de l'indice 1. Nous excepterons seulement les *cosinus directeurs* de la tangente qui seront toujours l, m, n. Cela posé, en se reportant aux notations des pages 173 et 174, on a

$$\frac{dl}{\omega_1} = -\frac{d\alpha_1}{u_1}, \quad \frac{dm}{\omega} = -\frac{d6_1}{u_1}, \quad \frac{dn}{\omega_1} = -\frac{d\gamma_1}{u_1};$$

et, à cause des formules (1) du n° 293,

$$(1)\quad \begin{cases} dl = a\omega_1, \\ dm = b\omega_1, \\ dn = c\omega_1, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} d\alpha_1 = -au_1, \\ d6_1 = -bu_1, \\ d\gamma_1 = -cu_1, \end{cases}$$

d'où

$$\omega_1 = adl + bdm + cdn,$$

$$(3)\quad u_1 = -(ad\alpha_1 + bd6_1 + cd\gamma_1.$$

Or, par hypothèse,

$$al + bm + cn = 0,$$

et par suite,

$$adl + bdm + cdn = -(lda + mdb + ndc) = -\omega \sin\varphi,$$

en désignant par φ l'angle de la génératrice avec l'axe du plan osculateur au point M de la directrice; donc

$$(4)\quad \omega_1 = -\omega \sin\varphi.$$

D'un autre côté, le plan tangent à la surface étant osculateur à la caractéristique (n° 291), les cosinus directeurs de l'axe de ce plan sont donnés par les relations

$$\alpha_1 = bn - cm,\quad 6_1 = cl - an,\quad \gamma_1 = am - bl.$$

On en déduit

$$\alpha_1 a + 6_1 b + \gamma_1 c = 0,$$

$$(5)\quad \begin{cases} ad\alpha_1 + bd6_1 + cd\gamma_1 = -(\alpha_1 da + 6_1 db + \gamma_1 dc) \\ \qquad = -\omega(\alpha_1\lambda + 6_1\mu + \gamma_1\nu), \end{cases}$$

puis

$$\alpha_1\lambda + 6_1\mu + \gamma_1\nu = -(\alpha l + 6m + \gamma n) = -\cos\varphi.$$

Ces résultats transforment l'équation (3) en celle-ci :

(6) $$u_1 = -\omega \cos \varphi.$$

Des valeurs (4) et (6) on tire

$$\frac{\omega_1}{u_1} = \operatorname{tang} \varphi.$$

Il suit de là que si la courbe directrice est plane, l'arête de rebroussement de la surface développable est une hélice (n° 283). Cette remarque a été faite par M. A. Serret dans le cas particulier où la génératrice est normale à une surface S sur laquelle la courbe est tracée, c'est-à-dire lorsque cette courbe est une ligne de courbure de S.

2° On a trouvé généralement (n° 287), pour la distance $MM_1 = h$,

$$h = -\frac{dx\,dl + dy\,dm + dz\,dn}{dl^2 + dm^2 + dn^2},$$

formule qui donne ici

(7) $$h = -\frac{ds}{\omega_1}.$$

D'un autre côté, des relations évidentes

$$x_1 - x = lh, \quad y_1 - y = mh, \quad z_1 - z = nh,$$

on tire

$$dx_1 - dx = ldh + hdl,\ dy_1 - dy = mdh + hdm,\ dz_1 - dz = ndh + hdn;$$

et par suite, à cause des équations (1) et (7),

$$dx_1 = ldh, \quad dy_1 = mdh, \quad dz_1 = ndh,$$

résultats faciles à trouver par la Géométrie.

On en déduit

$$ds_1 = dh,$$

ce qui fait voir que la génération des développées de la

courbe directrice est tout à fait semblable à celle de la développée d'une courbe plane.

295. Soit $z = \varphi(x, y)$ l'équation de la surface donnée; si l, m, n représentent les cosinus directeurs de la normale au point M, on sait qu'on a

$$l = \mathrm{N}p, \quad m = \mathrm{N}q, \quad n = -\mathrm{N},$$

avec

$$\mathrm{N} = (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$dz = pdx + qdy.$$

D'ailleurs, les formules générales du n° 292 deviennent ici

$$(1) \qquad \frac{dl}{a} = \frac{dm}{b} = \frac{dn}{c},$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{d.(\mathrm{N}p)}{dx} = \frac{d.(\mathrm{N}q)}{dy} = \frac{-d(\mathrm{N})}{dz}.$$

Il est manifeste que $d(\mathrm{N}p)$ est une différentielle totale, ainsi que $d(\mathrm{N}q)$ et $d(\mathrm{N})$.

On tire de là

$$-\frac{\mathrm{N}dz}{d\mathrm{N}} = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}.$$

L'égalité des deux derniers rapports donne immédiatement l'équation connue des lignes de courbure.

Remarque. — Les équations (1), cas particulier des équations (1) du n° 292, sont dues à O. Rodrigue.

296. 1° Puisque la courbe AB appartient à la surface S, on a (n° 295)

$$(1) \qquad \frac{dl}{dx} = \frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dz} = \frac{\sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2}}{ds} = \frac{v}{ds},$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à cette surface au point M (x, y, z) de la courbe.

On a de même

$$(2) \qquad \frac{dl_1}{dx} = \frac{dm_1}{dy} = \frac{dn_1}{dz} = \frac{\nu_1}{ds},$$

l_1, m_1, n_1 et ν_1 se rapportant à la surface S_1.

De plus,

$$\cos\theta = ll_1 + mm_1 + nn_1,$$

θ désignant l'angle sous lequel les deux surfaces se coupent au point M. De là résulte la relation

$$(3) \qquad -\sin\theta\, d\theta = l\,dl_1 + m\,dm_1 + n\,dn_1 + l_1\,dl + m_1\,dm + n_1\,dn;$$

ou, à cause des équations (1) et (2) et des identités évidentes

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0, \quad l_1\,dx + m_1\,dy + n_1\,dz = 0,$$

$$\theta = \text{const.}$$

2° Réciproquement : si $\theta = \text{const.}$, et qu'on ait en même temps les équations (1), l'équation (3) conduit à celle-ci :

$$(4) \qquad l\,dl_1 + m\,dm_1 + n\,dn_1 = 0;$$

et comme on a d'ailleurs

$$(5) \qquad l_1\,dl_1 + m_1\,dm_1 + n_1\,dn_1 = 0,$$

les équations (4) et (5) expriment que la direction (dl_1, dm_1, dn_1) est perpendiculaire à la direction (l, m, n) et à la direction (l_1, m_1, n_1), c'est-à-dire qu'elle se confond avec la direction (dx, dy, dz). C. Q. F. D.

297. L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

on aura pour celle du plan tangent au point (x, y, z)

$$(1) \qquad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1,$$

avec la relation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les équations d'une perpendiculaire à ce plan, menée par l'origine, peuvent s'écrire

$$(3) \qquad \frac{aY}{\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{bY}{\left(\frac{y}{b}\right)} = \frac{cZ}{\left(\frac{z}{c}\right)}.$$

Pour éliminer x, y, z entre les équations (1), (2), (3), remarquons que la valeur commune des rapports (3) est

$$(a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)^{\frac{1}{2}};$$

par conséquent,

$$\frac{aX}{\left(\frac{x}{a}\right)} X \frac{x}{a^2} + \frac{bY}{\left(\frac{y}{b}\right)} Y \frac{y}{b^2} + \frac{cZ}{\left(\frac{z}{c}\right)} Z \frac{z}{c^2} = (a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On en conclut

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)^{\frac{1}{2}},$$

équation de la *surface d'élasticité* dans la théorie des ondes. (N° 219.)

298. Le plan tangent a pour équation

$$(1) \qquad (a^2 - z^2)xX - b^2yY - x^2zZ + x^2z^2 = 0.$$

Pour déterminer son intersection avec la surface, il faut combiner l'équation (1) avec la suivante :

$$(2) \qquad (a^2 - Z^2)X^2 - b^2Y^2 = 0,$$

sachant qu'on a d'ailleurs

(3) $$(a^2 - z^2)x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Si l'on élimine y et Y entre ces trois équations, on trouve

$$(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 - Z^2)^{\frac{1}{2}} X = xz(z - Z) + (a^2 - z^2)X,$$

et par suite,

$$(a^2 - z^2)(z^2 - Z^2)X^2 = x^2z^2(z - Z)^2 + 2xz(a^2 - z^2)(z - Z)X.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(z - Z)\{(a^2 - z^2)[X^2(z + Z) - 2xzX] - x^2z^2(z - Z)\} = 0;$$

il en résulte que le plan tangent coupe la surface suivant deux lignes, l'une du premier ordre et l'autre du troisième.

La surface considérée ici est un conoïde droit dont la génératrice se meut parallèlement au plan xy, en rencontrant constamment l'axe des z et le cercle qui a pour équations

$$x = b, \quad z^2 + y^2 = a^2.$$

Elle porte le nom de *coin conique de Wallis.*

299. Équation du plan tangent :

$$h(xY - yX) + 2\pi(x^2 + y^2)Z = 2\pi z(x^2 + y^2).$$

La distance demandée est

$$p = \frac{2\pi rz}{(h^2 + 4\pi^2r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

en posant $x^2 + y^2 = r^2$.

300. Soit, pour abréger, $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface; il faut démontrer que

$$\frac{dF}{dz}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

est une quantité constante.

Posons

$$\frac{2\pi z}{h} - \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = \theta;$$

on a

$$\frac{dF}{dx} = \sin\theta - \frac{x(x\cos\theta - y\sin\theta)}{a(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dF}{dy} = \cos\theta - \frac{y(x\cos\theta - y\sin\theta)}{a(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{dF}{dz} = \frac{2\pi}{h}(x\cos\theta - y\sin\theta).$$

Or

$$(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 = x^2+y^2-a^2,$$

en vertu de l'équation de la surface. On déduit de là, pour l'expression cherchée,

$$\frac{2\pi a}{(h^2+4\pi^2a^2)^{\frac{1}{2}}};$$

l'inclinaison sur le plan xy est donc constante et égale à celle de la tangente à l'hélice directrice sur le même plan.

301. Équation du plan tangent :

$$(2r^2-a^2)xX + (2r^2-b^2)yY + (2r^2-c^2)zZ = r^4,$$

en posant

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

La distance cherchée a pour expression

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

302. (*Fig.* 23.) Soient M un point du lieu, H et K les points fixes dans le plan xy, C le milieu de HK, O le centre de la sphère, dont nous supposerons le rayon égal à 1, MP un arc de grand cercle perpendiculaire à HK, et posons

$$\mathrm{MH} + \mathrm{MK} = 2\alpha,\quad \mathrm{HC} = \mathrm{CK} = \gamma,$$
$$\mathrm{MP} = \theta,\quad \mathrm{CP} = \varphi.$$

L'angle P étant droit, la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique nous donne

$$\cos MK = \cos\theta \cos(\gamma - \varphi),$$
$$\cos MH = \cos\theta \cos(\gamma + \varphi);$$

d'où l'on tire

$$\cos \frac{MH - MK}{2} = \frac{\cos\theta \cos\varphi \cos\gamma}{\cos\alpha},$$
$$\sin \frac{MH - MK}{2} = \frac{\cos\theta \sin\varphi \sin\gamma}{\sin\alpha};$$

par suite,

$$1 = \cos^2\theta \left(\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\sin^2\varphi\right).$$

Or, il est facile de voir sur la figure qu'ou a

$$x = \cos\theta \sin\varphi, \quad y = \cos\theta \cos\varphi;$$

par conséquent,

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}x^2 + \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}y^2 = 1.$$

Si le rayon de la sphère est r, la projection de la courbe cherchée sur le plan xy a pour équation

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}x^2 + \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}y^2 = r^2;$$

la courbe résulte donc de l'intersection de la sphère avec un cylindre.

En combinant la dernière équation avec celle de la sphère,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on en déduit

$$\cos^2\gamma\, x^2 + (1 - \operatorname{tang}^2\alpha \cos^2\gamma)y^2 + z^2 = r^2 \cos^2\alpha,$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en posant

$$a^2 = \frac{r^2 \cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}, \quad b^2 = \frac{r^2 \cos^2\alpha}{1 - \tang^2\alpha\cos^2\gamma}, \quad c^2 = r^2\cos^2\alpha.$$

La tangente a pour équations

$$\frac{x(X-x)}{a^2(b^2-c^2)} = \frac{y(Y-y)}{b^2(c^2-a^2)} = \frac{z(Z-z)}{c^2(a^2-b^2)};$$

celle du plan normal sera donc

$$a^2(b^2-c^2)\frac{X-x}{x} + b^2(c^2-a^2)\frac{Y-y}{y} + c^2(a^2-b^2)\frac{Z-z}{z} = 0.$$

La courbe qu'on vient de trouver est l'*ellipse sphérique*. Pour étudier les courbes tracées comme celle-ci sur la sphère, il est avantageux d'employer un système de coordonnées pris sur la sphère même. Consulter à ce sujet le *Journal de Crelle*, t. VI et XIII, les *Transactions philosophiques*, vol. XII, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI et VII, et divers travaux de MM. Chasles, Gudermann, Borgnet, etc.

303. En prenant z pour variable indépendante, on trouve

$$b^2x^3X - a^2y^3Y + (a^2-b^2)z^3Z = a^2b^2(a^2-b^2).$$

304. Soient M le point mobile, O le centre de la sphère pris pour origine des coordonnées, OZ la direction du diamètre fixe, a le rayon de la sphère, p la projection de OM sur le plan XY, φ l'angle de OM avec sa projection, θ celui du plan mobile avec le plan ZX; on a immédiatement, quel que soit le rapport de φ à θ,

$$\cos\varphi = \frac{p}{a}, \quad \cos\theta = \frac{x}{p}.$$

Dans le cas particulier où $\varphi = \theta$, on trouve

$$x^2 + y^2 = ax.$$

La courbe cherchée résulte donc de l'intersection de la sphère donnée avec un cylindre. On peut aussi la représenter par l'un quelconque des trois systèmes :

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=ax, \\ z^2=a(a-x). \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x^2+y^2=ax, \\ z^4=a^2(z^2-y^2). \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} z^2=a(a-x), \\ z^4=a^2(z^2-y^2). \end{matrix}\right\}$$

Posant $a=2r$, on trouve

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{4r(r-x)-x^2}{r(2r+x)^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{y(5r+x)}{r(2r+x)^2},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=-\frac{z}{(2r+x)^2};$$

par suite,

$$\rho=\frac{(a+x)^{\frac{3}{2}}}{(5a+3x)^{\frac{1}{2}}}.$$

En prenant x pour variable indépendante, l'équation du plan osculateur est

$$[2xy^2-a(y^2+z^2)]\mathrm{X}+2y^3\mathrm{Y}-2z^3\mathrm{Z}=ax(y^2+z^2)-2a^2z^2.$$

305. L'équation de ce plan est assez compliquée, mais si l'on pose

$$a^2(c^2-b^2)=\mathrm{A}, \quad b^2(a^2-c^2)=\mathrm{B}, \quad c^2(b^2-a^2)=\mathrm{C},$$

et

$$\mathrm{B}z^2-\mathrm{C}y^2=\mathrm{L}, \quad \mathrm{C}x^2-\mathrm{A}z^2=\mathrm{M}, \quad \mathrm{A}y^2-\mathrm{B}x^2=\mathrm{N},$$

elle prend la forme très-symétrique

$$\frac{\mathrm{L}x^3}{\mathrm{A}}(\mathrm{X}-x)+\frac{\mathrm{M}y^3}{\mathrm{B}}(\mathrm{Y}-y)+\frac{\mathrm{N}z^3}{\mathrm{C}}(\mathrm{Z}-z)=0.$$

306. On arrive à l'équation

$$\rho^2+[a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)]\frac{\rho}{p}+\frac{a^2b^2c^2}{p^4}=0,$$

en posant

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme p est la distance du centre au plan tangent, le dernier terme de l'équation fait voir que, pour tous les points dont les plans tangents sont également éloignés du centre, le produit des rayons de courbure principaux est constant.

307. $$\rho^2 - (a+b+4x)\frac{x}{2p}\rho + \frac{abx^4}{4p^4} = 0.$$

p a la même signification que dans le numéro précédent.

308. $$\rho^2 - 2(x^2+y^2+z^3)\frac{\rho}{p} + \frac{27m^6}{p^4} = 0.$$

p représente la distance de l'origine au plan tangent.

309. $$n^2\rho^2 - [1 + n^2(x^2+y^2)]^3 = 0.$$

Les deux rayons de courbure sont égaux et de signe contraire en chaque point.

§ XV. — *Enveloppe des lignes et des surfaces.*

310. k désignant une constante, l'équation générale de ces ellipses sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1.$$

En différentiant par rapport à a, on trouve

$$a = \frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}, \quad k - a = \frac{ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

et par suite,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

(N[os] 228 et 229.)

311. Soient k la longueur de la ligne, a et b les longueurs qu'elle intercepte sur chacun des axes coordonnés, à partir de l'origine ; son équation sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

avec la condition $a^2 + b^2 = k^2$. Différentiant ces deux équations par rapport aux deux paramètres a et b, et désignant par λ un multiplicateur indéterminé, il vient

$$\lambda \frac{x}{a^2} = a, \quad \lambda \frac{y}{b^2} = b,$$

et aussi

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \lambda = k^2;$$

par conséquent l'enveloppe a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

c'est l'hypocycloïde du numéro précédent.

312. On trouve

$$x^2 = 4c(c - y).$$

C'est l'équation de l'enveloppe des paraboles que décrit un projectile lancé dans le vide avec une vitesse constante, mais sous une inclinaison variable. Fatio proposa ce problème à Jean Bernoulli, qui le résolut ; ce fut le premier exemple de la détermination de l'enveloppe d'une suite de lignes courbes.

313. $y^2 = 4m(x + m)$.

314. Soient OA l'axe des x, OB' celui des y, et posons

$$OA = a, \quad OA = b, \quad oa = p, \quad ob = q;$$

on demande l'enveloppe des droites données par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

sachant qu'on a

$$pq = (a-p)(b-q),$$

ou

(2) $$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = 1.$$

En différentiant (1) et (2) par rapport aux paramètres variables, on a

$$\frac{x}{p^2}dp + \frac{y}{q^2}dq = 0, \quad \frac{dp}{a} + \frac{dq}{b} = 0;$$

par suite,

$$\frac{ax}{p^2} = \frac{by}{q^2},$$

ou bien

(3) $$\frac{\sqrt{ax}}{p} = \frac{\pm\sqrt{by}}{q}.$$

Le résultat de l'élimination de p et de q entre les équations (1), (2), (3) peut s'écrire

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} \pm \sqrt{\frac{x}{b}}\right)^2 = 1;$$

c'est l'équation d'une parabole.

Cette enveloppe est employée quelquefois dans les constructions comme *courbe de raccommodement*.

315. Appelant x_1 et y_1 les coordonnées de l'extrémité d'un diamètre, celles de son conjugué seront

$$-\frac{a}{b}y_1, \quad \frac{b}{a}x_1,$$

et l'équation de la ligne qui joint ces deux points

$$bx_1(ay + bx) + ay_1(ay - bx) - a^2b^2 = 0.$$

L'enveloppe est une autre ellipse qui a pour équation

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

316. Soit

(1) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0$$

l'équation de la première courbe. Pour plus de simplicité, nous supposerons que la seconde est une ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

α, 6 désignant les coordonnées d'un point de (1), la corde de contact correspondante dans l'ellipse est donnée par l'équation

(2) $$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{6y}{b^2} = 1;$$

on a aussi

(3) $$A\alpha^2 + 2B\alpha 6 + C6^2 + 2D\alpha + 2E6 + 1 = 0.$$

En différentiant les relations (2) et (3) et nommant λ un multiplicateur indéterminé, on trouve

$$\lambda\frac{x}{a^2} + A\alpha + B6 + D = 0,$$

$$\lambda\frac{y}{b^2} + B\alpha + C6 + E = 0.$$

Il en résulte

$$\lambda = D\alpha + E6 + 1.$$

Substituons cette valeur dans les deux équations précédentes, puis éliminons α et 6; il viendra

(4) $$\left\{\begin{array}{l}(C - E^2)\dfrac{x^2}{a^2} - 2(B - DE)\dfrac{xy}{a^2b^2} + (A - D^2)\dfrac{y^2}{b^2} \\ + 2(CD - DE)\dfrac{x}{a^2} + 2(AE - BD)\dfrac{y}{b^2} + AC - B^2\end{array}\right\} = 0.$$

On sait que les courbes représentées par les équations (1) et (4) sont dites *polaires réciproques*.

317. Soit α l'angle de la droite variable avec la normale au point $m(x, y)$ de la courbe donnée C. L'équation de cette droite sera

$$(1) \qquad (Y - y)(\tang\alpha - y') = (X - x)(1 + y'\tang\alpha).$$

Une position de la droite variable, infiniment voisine de la première, détermine sur celle-ci un point limite μ dont les coordonnées X, Y satisfont à l'équation (1) et à la suivante

$$(2) \quad (Y-y)(\tang\alpha - y'') + 1 + y'^2 = (X-x)\left(y'\frac{\alpha'}{\cos^2\alpha} - y''\tang\alpha\right),$$

qu'on obtient en différentiant l'équation (1) par rapport à x. On déduit de là

$$(3) \quad \begin{cases} X - x = \dfrac{\cos\alpha(\sin\alpha - y'\cos\alpha)(1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2)\alpha'}, \\ Y - y = \dfrac{\cos\alpha(\cos\alpha + y'\sin\alpha)(1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2)\alpha'}, \end{cases}$$

et par suite,

$$m\mu = \pm \frac{\cos\alpha(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' - (1 + y'^2)\alpha'}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de la courbe donnée; si l'on pose

$$(4) \qquad \frac{\cos\alpha(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' - (1 + y'^2)\alpha'} = r,$$

la quantité r, qu'on peut désigner sous le nom de *rayon de courbure oblique*, se réduit à ρ quand α est nul.

L'équation (4) revient à celle-ci :

$$(6) \qquad \frac{\cos\alpha}{r} = \frac{1}{\rho} - \frac{d\alpha}{ds},$$

qu'il est facile de démontrer géométriquement.

Maintenant, pour trouver l'élément dS de la courbe lieu des points μ, on a les équations

(7) $$(X-x)^2+(Y-y)^2=r^2,$$

(8) $$(X-x)\,dX+(Y-y)\,dY=(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+r\,dr,$$

(9) $$\frac{X-x}{r}\frac{dX}{dS}+\frac{Y-y}{r}\frac{dY}{dS}=1.$$

Or, les relations (3), mises sous la forme

(10) $$\left\{\begin{aligned} X-x&=-r\,\frac{\cos\alpha\,dy-\sin\alpha\,dx}{ds},\\ Y-y&=r\,\frac{\sin\alpha\,dy+\cos\alpha\,dx}{ds},\end{aligned}\right.$$

nous donnent

(11) $$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=r\,ds\sin\alpha.$$

En rapprochant les équations (8), (9) et (11), on est conduit à ce résultat simple :

(12) $$dS=dr+\sin\alpha\,ds,$$

qu'on trouve aussi par la Géométrie.

318. r étant la portion du rayon incident comprise entre les courbes A et C, si l'on applique à ces deux courbes la formule (6) du numéro précédent, on trouve

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{1}{\rho}-\frac{d\alpha}{ds};$$

et de même, r_1 désignant la portion du rayon réfracté comprise entre les courbes A_1 et C, on a

$$\frac{\cos\alpha_1}{r_1}=\frac{1}{\rho}-\frac{d\alpha_1}{ds}.$$

D'ailleurs,

$$\cos\alpha\, d\alpha = n \cos\alpha_1\, d\alpha_1,$$

d'où

$$\cos\alpha\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos\alpha}{r}\right) = n\cos\alpha_1\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos\alpha_1}{r_1}\right).$$

Cette formule générale a été démontrée par C. Lambert (*Annales de Mathématiques*, t. XX). Petit l'avait donnée pour le cas du cercle, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II.

Quand on suppose que la courbe A se réduit à un point, l'équation (12) du numéro précédent devient

$$dr + \sin\alpha\, ds = 0.$$

Si la courbe A_1 se réduit aussi à un point, on a de même

$$dr_1 + \sin\alpha_1\, ds = 0;$$

par suite,

$$\frac{dr}{dr_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = n,$$

d'où

$$r = nr_1 + \text{const}.$$

Cette équation est celle des *ovales de Descartes*, nommées aussi *lignes aplanétiques* par M. Quetelet.

319. Prenons pour origine le sommet du parallélipipède qui appartient au tétraèdre, pour axes les arêtes qui passent en ce point; appelons a, b, c les longueurs interceptées sur ces arêtes à partir du sommet; l'équation du plan sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

avec la condition

$$abc = m^3 = \text{const}.$$

L'enveloppe a pour équation

$$xyz = \frac{m^3}{27}.$$

320. On a l'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2$$

avec la condition

$$a^2 + b^2 = c^2 = \text{const.}$$

Si λ est un multiplicateur indéterminé, on trouve les relations

$$\lambda a + x - a = 0, \quad \lambda b + y - b = 0;$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

et aussi

$$\lambda c^2 + ax + by - c^2 = 0.$$

Mais

$$\frac{ax+by}{a^2+b^2} = \frac{ax+by}{c^2} = \pm \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{c};$$

l'équation cherchée est donc

$$\left[c \pm (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = r^2 - z^2.$$

C'est l'équation du *tore*.

321. $x^2 + y^2 = c^2 z^2$, équation du cône donné; $lx + my + nz = p$, équation du plan variable, dans laquelle l, m, n sont les cosinus des angles qu'il fait avec les plans coordonnés, et p la distance de l'origine à ce plan;

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{cp}{n} - \frac{c(lx+my)}{n}$$

sera l'équation de la courbe suivant laquelle se projette l'in-

tersection du cône et du plan. La valeur de $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = r$ fait voir que l'origine est un foyer de cette projection. Comparons-la avec l'équation

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\alpha)},$$

qui est celle des sections coniques en coordonnées polaires, le pôle étant au foyer. Comme cette dernière peut s'écrire

$$r + re\cos\theta\cos\alpha + re\sin\theta\sin\alpha = a(1-e^2),$$

ou bien

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e^2) - ex\cos\alpha - ey\sin\alpha,$$

on a

$$a(1-e^2) = \frac{ep}{n}, \quad e^2 = \frac{c^2(l^2+m^2)}{n^2}.$$

On en conclut que l'aire de la projection est

$$\frac{\pi n e^2 p^2}{[n^2 - c^2(l^2+m^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

et celle de la section même

$$\frac{\pi c^2 p^2}{[n^2 - c^2(l^2+m^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Le cône oblique détaché a donc pour expression

$$\frac{\pi c^2}{3} \frac{p^3}{[n^2(1+c^2) - c^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette quantité devant être constante, posons-la égale à $\frac{\pi c^2}{3} a$, et la question se ramène à trouver l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = a[n^2(1+c^2) - c^2]^{\frac{1}{3}},$$

l, m, n étant liées par la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

On trouve

$$c^2 z^2 - (x^2 + y^2) = a^2 c^2.$$

322. Les paramètres x, y, z étant liés par les relations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad lx + my + nz = p,$$

on est conduit à chercher l'enveloppe des plans représentés par l'équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1,$$

ce qui donne, en désignant par λ et μ deux coefficients indéterminés,

$$\lambda \frac{x}{a^2} + \mu \frac{X}{a^2} + l = 0,$$

$$\lambda \frac{y}{b^2} + \mu \frac{Y}{b^2} + m = 0, \quad \frac{\lambda z}{c^2} + \mu \frac{Z}{c^2} + n = 0;$$

et, par suite,

$$\lambda + \mu + p = 0.$$

On déduit de là

$$\mu(X - x) = px - a^2 l, \quad \mu(Y - y) = py - b^2 m,$$
$$\mu(Z - z) = pz - c^2 n,$$

et aussi

$$(1) \qquad \frac{X - x}{px - a^2 l} = \frac{Y - y}{py - b^2 m} = \frac{Z - z}{pz - c^2 n}.$$

Soit k la valeur commune de ces trois rapports; multipliant les deux termes de chacun d'eux respectivement par $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$, on trouve facilement

$$k = \frac{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1}{p - (lX + mY + nZ)}.$$

Multiplions encore les deux termes de chacun des rapports (1) respectivement par l, m, n, on en déduira

$$k = \frac{p - (lX + mY + nZ)}{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - p^2};$$

et par conséquent l'équation demandée sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{(lx + my + nz - p)^2}{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - p^2}.$$

323. λ et μ étant des multiplicateurs indéterminés, les conditions du problème fournissent les relations

(1) $$\lambda x = \mu l + \frac{l}{p^2 - a^2},$$

(2) $$\lambda y = \mu m + \frac{m}{p^2 - b^2},$$

(3) $$\lambda z = \mu n + \frac{n}{p^2 - c^2},$$

(4) $$\lambda = p\left[\frac{l^2}{(p^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(p^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(p^2 - c^2)^2}\right].$$

Des équations (1), (2) et (3) on tire $\lambda p = \mu$, et aussi

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda r^2 = \mu p + \frac{lx}{p^2 - a^2} + \frac{my}{p^2 - b^2} + \frac{nz}{p^2 - c^2}.$$

Les mêmes équations, élevées au carré et ajoutées, nous donnent

$$\lambda^2 r^2 = \mu^2 + \frac{l^2}{(p^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(p^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(p^2 - c^2)^2}.$$

On déduit de là

$$\lambda^2(r^2 - p^2) = \frac{l^2}{(p^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(p^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(p^2 - c^2)^2} = \frac{\lambda}{p},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{1}{p(r^2 - p^2)}, \quad \mu = \frac{1}{r^2 - p^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (1), (2), (3), conduisent aux relations

$$\frac{x}{r^2-a^2}=\frac{pl}{p^2-a^2},$$

$$\frac{y}{r^2-b^2}=\frac{pm}{p^2-b^2},$$

$$\frac{z}{r^2-c^2}=\frac{pn}{p^2-c^2}.$$

En les multipliant respectivement par x, y, z, elles donnent enfin

$$\frac{x^2}{r^2-a^2}+\frac{y^2}{r^2-b^2}+\frac{z^2}{r^2-c^2}=1.$$

C'est l'équation de la surface de l'onde lumineuse qui se propage dans un milieu cristallisé. En en retranchant membre à membre l'équation

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=1,$$

on trouve

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2}=0.$$

Telle est la forme donnée par Fresnel.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

QUESTIONS.

§ I. — *Intégration par substitution.*

324. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}}.$

325. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4}.$

326. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

327. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}.$

328. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a + bx \pm cx^2)^{\frac{1}{2}}}.$

329. $\displaystyle\int \frac{(ax + b)\,dx}{x^2 + px + q}.$

330. $\displaystyle\int \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$

331. $\displaystyle\int \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{x}.$

332. $\displaystyle\int \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{x}.$

333. $\displaystyle\int \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{x(x-a)^{\frac{1}{2}}}\,dx.$

334. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^{\frac{1}{2}} + (x+b)^{\frac{1}{2}}}.$

335. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$

336. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

337. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}.$

338. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

339. $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

340. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}.$

341. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}}.$

342. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}}.$

343. $\displaystyle\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}.$

344. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}.$

345. $\displaystyle\int \mathrm{tang}^2\,x\,dx.$

346. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

347. $\int \frac{dx}{a(1+\cos x)}$.

348. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$.

349. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$.

350. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

351. $\int \frac{\sin x\cos^2 x\,dx}{1+a^2\cos^2 x}$.

352. $\int \frac{dx}{a + b\,\mathrm{tang}\,x}$.

353. $\int \frac{\mathrm{tang}\,x\,dx}{(a + b\,\mathrm{tang}^2 x)^{\frac{1}{2}}}$.

354. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

§ II. — *Intégration par parties.*

355. $\int \frac{\mathrm{arc}\sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

356 $\int \frac{\mathrm{arc}\sin x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,x\,dx$.

357. $\int \mathrm{arc}\sin\left(\frac{x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$.

358. $\int x\,\mathrm{arc}\sin\left(\frac{2a-x}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} dx$.

359. $\int \mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x\,dx$.

360. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x\,dx$.

361. $\displaystyle\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

362. $\displaystyle\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,x\,dx.$

§ III. — *Intégration par les fractions rationnelles.*

363. $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+2)\,dx}{x^4-5x^2+4}.$

364. $\displaystyle\int \frac{x^p\,dx}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}$; $p < n$.

365. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+6x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\,dx.$

366. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}.$

367. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(x-1)^n}$; n pair.

368. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}.$

369. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx.$

370. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+2x^3+3x^2}.$

371. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}.$

372. $\displaystyle\int \frac{(x^2+3x-2)\,dx}{(x^2-x+1)^2(x-1)^2}.$

373. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}.$

374. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}.$

375. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}.$

376. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^6}.$

§ IV. — *Expressions qu'on intègre en les rendant rationnelles.*

377. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

378. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$.

379. $\int \frac{dx}{x(bx-a)^{\frac{1}{2}}}$.

380. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

381. $\int x^2(a+x)^{\frac{1}{2}} dx$.

382. $\int \frac{x dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$.

383. $\int (a+bx)^{\frac{3}{2}} x dx$.

384. $\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}$.

385. $\int (a+x)^{\frac{1}{3}} x dx$.

386. $\int (a+x)^{\frac{2}{3}} x^3 dr$.

387. $\int \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

388. $\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

389. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$.

390. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

391. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$.

392. $\displaystyle\int \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$.

393. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x(1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

394. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

395. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

396. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}(h+kx^2)}$.

397. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}}$.

398. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax^{2n}-b)^{\frac{1}{2}}}$.

399. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

400. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1-x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

401. $\displaystyle\int X\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{m}{n}}dx$;

X est une fonction rationnelle de x et de $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$.

402. $\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$.

403. $\int \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx}{1-x^4}$.

404. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^4)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$.

405. $\int \frac{dx}{(1+x^4)\left[(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}$.

406. $\int \frac{dx}{(1+x^6)\left[(1+x^6)^{\frac{1}{3}}-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}$.

407. $\int \frac{dx}{(1-x^m)(2x^m-1)^{\frac{1}{2m}}}$.

408. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x^m)(2x^m-1)^{\frac{1}{2m}}}$.

§ V. — *Intégration par réductions successives.*

409. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

410. $\int \frac{x^n dx}{(a^2+x^2)^p}$.

411. $\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$; n impair.

412. $\int \frac{dx}{x^n(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$.

413. $\int \frac{dx}{x^n(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$.

414. $\int \frac{x^n\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$.

415. $\int \frac{dx}{x^n(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$.

416. $\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}$.

417. $\int \frac{x^n dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}$.

418. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$.

§ VI. — *Intégration des fonctions de plusieurs variables.*

419. $du = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + a\,dx + 2by\,dy.$

420. $du = \frac{xy\,dy - y^2dx}{x^2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

421. $du = \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{dy}{y} - \frac{x\,dy}{y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

422. $du = (a^2y + x^3)\,dx + (b^3 + a^2x)\,dy.$

423. $du = (3xy^2 - x^2)\,dx - (1 + 6y^2 - 3x^2y)\,dy.$

424. $du = \frac{a(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} + by^2dy.$

425. $du = \frac{y\,dy + x\,dx - 2y\,dx}{(y-x)^2}.$

426. $du = (\sin y + y\cos x)\,dx + (\sin x + x\cos y)\,dy.$

427. $du = \frac{y\,dx}{a-z} + \frac{x\,dy}{a-z} + \frac{xy\,dz}{(a-z)^2}.$

428. $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2+z^2} + z\,dz.$

429. $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz.$

430. $du = \frac{a\,dx - b\,dy}{z} + \frac{by - ax}{z^2}\,dz.$

§ VII. — *Quadrature des courbes planes.*

431. Tractrice. (N° 267.)

432. Cissoïde. (N° 263.)

433. Chaînette. (N° 266.)

434. Développée de l'ellipse.

435. Lemniscate. (N° 270.)

436. $r \cos 2\theta = 1$.

Exprimer r et θ en fonction de l'aire obtenue, cette aire étant supposée nulle pour $\theta = 0$.

437. $r = a \cos\theta + b$; $a > b$.

438. $r = a \operatorname{séc}\theta + b$. (N° 258.)

439. Épicycloïde. (N° 229.)

440. $x^4 + y^4 - ax^2y = 0$.

441. $y^3 + x^3 - axy = 0$. (*Folium* de Descartes.)

§ VIII. — *Rectification des courbes.*

442. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (N° 229.)

443. Chaînette. (N° 433.)

444. Tractrice. (N° 431.)

445. Cissoïde. (N° 432.)

446. Développée de l'ellipse. (N° 434.)

447. Épicycloïde. (N° 439.)

448. Loxodromie. Cette courbe a pour équations :

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left(e^{n \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}} + e^{-n \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}} \right) = 2a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

449. Soient OM_1, OM_2 les arcs de deux courbes ayant

une tangente commune à l'origine O, et leurs tangentes aux *points correspondants* quelconques $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ parallèles entre elles. $OM = s$ étant l'arc d'une troisième courbe dont un point quelconque M est déterminé par les équations

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad y = a_1 y_1 + a_2 y_2,$$

on aura, s_1 et s_2 désignant les deux premiers arcs,

$$s = a_1 s_1 + a_2 s_2.$$

450. Deux rayons vecteurs r et r_1 de la lemniscate (n° 270) étant liés par la relation

$$r_1 = \frac{2a^2 r (a^4 - r^4)^{\frac{1}{2}}}{a^4 + r^4},$$

prouver que l'arc sous-tendu par le rayon r_1 est double de l'arc sous-tendu par le rayon r.

451. Deux courbes étant représentées par les équations

$$(1) \qquad r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \theta,$$

$$(2) \qquad a^2 = r^2 \cos 2\theta,$$

prouver que la longueur totale de la première est égale à six fois la différence entre l'arc infini de la seconde et son asymptote. L'arc de la seconde courbe et son asymptote commencent à l'axe polaire. (W. Roberts.)

§ IX. — *Cubature.*

452. Volume engendré par la chaînette (n° 443) tournant autour de l'axe des x.

453. Volume engendré par la cissoïde (n° 445) tournant autour de son asymptote.

454. Volume engendré par la conchoïde (n° 438) tournant autour de son asymptote.

455. Volume engendré par la révolution autour de l'axe polaire de la courbe dont l'équation est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

456. Paraboloïde elliptique.

457. $c^2z^2 = y^2(a^2 - x^2)$.

458. $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

459. Les axes de deux cylindres droits égaux se coupent rectangulairement ; évaluer le volume commun à ces deux solides (n° 467).

460. Trouver la portion de sphère comprise dans un cylindre droit dont l'axe passe par le centre de la sphère.

461. Trouver la portion de sphère comprise dans un cylindre droit dont une génératrice passe par le centre de la sphère, et dont la base a pour rayon la moitié de celui de la sphère (n° 468).

462. Volume commun au paraboloïde et au cylindre qui ont pour équations

$$y^2 + z^2 = 4ax, \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

463. Les axes de deux cylindres droits égaux se coupent en faisant un angle α ; évaluer le volume commun à ces deux solides.

464. Un plan passe par le centre de base d'un cylindre droit en faisant avec cette base l'angle α ; évaluer les volumes des deux portions de cylindre ainsi obtenues (n° 470).

§ X. — *Quadrature des surfaces courbes.*

465. Surface engendrée par la cycloïde tournant autour de sa base.

466. Surface engendrée par la révolution de la tractrice (n° 444) tournant autour de l'axe des x.

467. Les axes de deux cylindres droits égaux se coupent rectangulairement; évaluer la portion de surface de l'un d'eux comprise dans l'autre. (N° 459.)

468. Trouver la portion de surface de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

comprise dans le cylindre

$$x^2 + y^2 = ax. \quad \text{(N° 461.)}$$

469. Les données étant celles du numéro précédent, trouver la portion de surface cylindrique comprise dans la sphère.

470. Un plan passe par le centre de base d'un cylindre droit en faisant avec cette base un angle α; évaluer les surfaces des deux portions de cylindre ainsi obtenues. (N° 464.)

§ XI. — *Changement de variables sous le signe d'intégration.*

471. Étant données les relations

$$x + y = u, \quad y = uv,$$

transformer l'intégrale

$$\int\int x^{m-1} y^{n-1} \, dx \, dy$$

en une autre où les variables soient u et v.

472. Étant données les relations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

transformer l'intégrale

$$\int\int e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

en une autre où les variables soient r et θ.

473. Étant données les relations

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\sin\theta\cos\varphi,$$

transformer l'intégrale

$$\int\int\int \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$$

en une autre où les variables soient r, θ et φ.

474. z étant une fonction de x et y déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

transformer l'intégrale

$$\int\int\int dx\,dy\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en une autre où les variables soient θ et φ, sachant qu'on a les relations

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\quad y = b\sin\theta\sin\varphi.$$

§ XII. — *Intégrales définies.*

475. Si la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ ne change pas quand on remplace x par y et y par x, on a

$$u=\int_0^\infty \frac{dx}{x\mathrm{F}\left(x,\frac{1}{x}\right)} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x\mathrm{F}\left(x,\frac{1}{x}\right)}.$$

476. Démontrer la relation

$$\int_0^a dx\int_0^{\varphi(x)} f(y)\,dy = a\int_0^{\varphi(a)} f(y)\,dy - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(a)} f(y)\,\psi(y)\,dy,$$

en supposant qu'on a

$$\psi[\varphi(x)] = x.$$

477. Trouver la règle de la différentiation sous le signe $\int$ dans le cas où les limites sont variables, en le ramenant au cas où elles sont constantes.

478. $u = \int_0^\infty \frac{x^{n-1} - 1}{\log x}\, dx.$

479. $u = \int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{1 + x^2}\, dx.$

480. $u = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx.$

481. $u = \int_0^1 \frac{x \log x}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx.$

482. $u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx.$ (Euler.)

483. $u = \int_0^1 \frac{\log x\, dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

484. $u = \int_0^1 \frac{x \log x}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx.$ (Euler.)

485. $u = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$

486. $u = \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx.$ (Poisson.)

487. $u = \int_0^1 \frac{\log x}{1 + x}\, dx.$ (Euler.)

488. $u = \int_0^1 \frac{\log x}{1 - x}\, dx.$ (Euler.)

489. Démontrer la relation

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}},$$

n désignant un nombre entier positif.

490. $u=\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx.$

491. Réduire aux fonctions eulériennes de seconde espèce l'expression

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+h)^{a+b}}dx. \quad \text{(Abel.)}$$

492. $u=\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx.$ (Laplace.)

493. $u=\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x(1+x^2)}.$ (Laplace.)

494. $u=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\frac{1}{1-2a\cos bx+a^2};\quad a<1.$

(Legendre.)

495. $u=\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2}\frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2};\quad a<1.$

(Legendre.)

496. $u=\int_0^\pi \frac{\cos bx\,dx}{1-2a\cos x+a^2};\quad b$ entier, $a<1.$

(Euler.)

497. $u=\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx.$ (Laplace.)

498. $u=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2bx\,dx.$

499. $u=\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n};\quad a<1,\quad n$ entier.

(Poisson.)

500. Démontrer la formule

$$(1)\quad \int_{\infty}^{m^{\frac{1}{n}}}\left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m dx = \frac{mn}{mn+1}\int_0^{m^{\frac{1}{n}}}\left(1-\frac{x^n}{m}\right)^{m-1} dx,$$

et en déduire la première de ces intégrales quand m est un nombre entier positif.

(STURM, *Cours d'Analyse.*)

501. Démontrer la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x^n}dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\times\left[\frac{n}{1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\frac{2n}{n+1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1}\frac{3n}{2n+1}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n-1}\cdots\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Cas particulier où $n=2$.

(STURM, *Cours d'Analyse.*)

§ XIII. — *Équations linéaires à coefficients constants.*

502. $\dfrac{dy}{dx} - ay = x^4.$

503. $\dfrac{dy}{dx} + ay = e^{mx}.$ Cas où $m = -a$.

504. $\dfrac{dy}{dx} - ay = e^{mx}\cos px.$

505. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{x}{(1+x)^2}.$

506. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^2.$

507. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2m\dfrac{dy}{dx} + m^2y = \sin nx.$

508. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \cos mx.$ Cas où $m = n$.

509. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6y = \sin mx.$

510. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^n.$

511. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - a^4y = x^3.$

512. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2a^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^4y = \cos x.$

513. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 5\dfrac{d^3y}{dx^3} - 10\dfrac{d^2y}{dx^2} - 36\dfrac{dy}{dx} + 72y = e^{mx}.$

514. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 15y = x^2.$

§ XIV. — *Équations linéaires à coefficents variables.*

515. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = ax.$

516. $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + ny = a(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$

517. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{ay}{1 - x^2} = \dfrac{1 + x}{(1 - x)^3}.$

518. $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} - ny = x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$

519. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = x^m.$

520. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{(1 - x)^2}.$

521. $(1 + x)^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + (1 + x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$+ 3(1 + x)\frac{dy}{dx} - 8y = \frac{x}{(1 + x)^{\frac{1}{2}}}.$$

522. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7x\dfrac{dy}{dx} - 8y = \varphi(x).$

523. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$

524. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(n^2 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0.$

525. $x^4\frac{d^2y}{dx^2} - c^2y = 0.$

526. $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + c^2y = 0.$

527. $x^{\frac{4}{3}}\frac{d^2y}{dx^2} - c^2y = 0.$

528. $x^{\frac{8}{5}}\frac{d^2y}{dx^2} - c^2y = 0.$

§ XV. — *Équations différentielles non linéaires.*

529. $dy + \frac{xy\,dx}{1-x^2} = xy^{\frac{1}{2}}\,dx.$

530. $ay\,dy - by^2dx = cx\,dx.$

531. $xy^2dy + y^3dx = \frac{a^3dx}{x}.$

532. $y\,dy - \frac{ay^2}{x^2}\,dx = \frac{b}{x^3}\,dx.$

533. $dx - xy\,dy = x^2y^3dy.$

534. $x\,dx + y\,dy = my\,dx.$

535. $y^3dy + 3y^2x\,dx + 2x^3dx = 0.$

536. $xy\,dy - y^2dx = (x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}\,dx.$

537. $x^3dy - x^2y\,dx + y^3dx - xy^2dy = 0.$

538. $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = ax^m(x\,dy - y\,dx).$

539. $(a + a_1x + a_2y)(x\,dy - y\,dx)$
$= (b + b_1x + b_2y)dy - (c + c_1x + c_2y)dy.$ (JACOBI.)

540. $dy + y^2dx = x^{-\frac{4}{3}}\,dx.$

541. $dy - y^2 dx = 2x^{-\frac{8}{3}} dx.$

542. $aydx + bxdy + x^m y^n (cydx + exdy) = 0.$

543. $(y - x)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dy = n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx.$

544. $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + xy + y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ (x^3 y + x^2 y^2 + xy^3)\frac{dy}{dx} - x^3 y^3 = 0.$$

545. $(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + bx(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - bx = 0.$

546. $\left[1 - \frac{y^2}{x^2}(x^2 + y^2)^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = 0.$

547. $y - x\frac{dy}{dx} = nx\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$

548. $y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n\left(x + y\frac{dy}{dx}\right).$

549. $y = x + x\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2}.$

550. $(4x^2 - a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} + y^2 a^2 = 0.$

551. $y = x\left[\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$

552. $\frac{d^2y}{dx^2} + f(y)\frac{dy}{dx} + \varphi(y)\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$

(LIOUVILLE.)

553. $x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2.$

554. $x^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$

555. $y\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y\,\frac{dy}{dx}}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

556. $xy\,\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{dy}{dx} + x\,\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{nx\,\frac{dy^2}{dx^2}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

557. $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{2x}\,\frac{d^2y}{dx^2}.$

558. $1+\frac{dy^2}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} = a\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$

559. $a^2\,\frac{d^2y}{dx^2}\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + a^2\,\frac{dy}{dx} = x^2.$

560. $(x+a)\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$

561. $\left(y^2+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = y\left(2\,\frac{dy^2}{dx^2} + y^2 + y\,\frac{d^2y}{dx^2}\right).$

562. $\frac{dy^2}{dx^2} - y\,\frac{d^2y}{dx^2} = n\left[\frac{dy^2}{dx^2} + a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$

§ XVI. — *Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.*

563. $y + (y-x)\,\frac{dy}{dx} + (a-x)\,\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$

564. $y^2 - 2xy\,\frac{dy}{dx} + (1+x^2)\,\frac{dy^2}{dx^2} = 1.$

565. $x^2 + 2xy\,\frac{dy}{dx} + (a^2-x^2)\,\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$

566. $\frac{dy^2}{dx^2} + y\,\frac{dy}{dx} + x = 0.$

567. $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(y - x\,\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2\,\frac{dy^2}{dx^2}.$

568. $y^2\frac{dy^2}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + ax + by = 0.$

569. $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right) + x^3 = 0.$

570. Les équations

$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 = 0$$

satisfont à l'équation différentielle

$$y\frac{dy^2}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0;$$

ces intégrales sont-elles singulières ou particulières?

571. L'équation

$$y^2 + (x-1)^2 = 0$$

est-elle une intégrale singulière de

$$\frac{dy^2}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + x = 0?$$

§ XVII. — *Équations différentielles simultanées.*

572. $\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t,$

$\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t.$

573. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t,$

$\frac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t}.$

574. $\frac{dx}{dt} + by + cz = 0,$

$\frac{dy}{dt} + a'x + c'z = 0,$

$$\frac{dz}{dt} + a''x + b''y = 0.$$

575. $$\frac{d^2x}{dt^2} = ay + bx + c,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a'y + b'x + c'.$$

576. $$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + x = \cos 2t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} + 6y + 5x = \sin t.$$

577. $$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + m\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - m\cos\theta = 0.$$

578. $$a\frac{dx}{dt} + (c-b)yz = 0,$$

$$b\frac{dy}{dt} + (a-c)zx = 0,$$

$$c\frac{dz}{dt} + (b-a)xy = 0.$$

579. $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dR}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{dz};$$

x, y, z sont des fonctions de t, et R est une fonction de $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. (BINET.)

§ XVIII. — *Équations aux différentielles partielles linéaires et du premier ordre.*

580. $$x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = \frac{x^2}{y}.$$

581. $$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = \frac{z}{x+y}.$$

582. $$y\frac{dz}{dx} + x\frac{dz}{dy} = z.$$

583. $\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{y}\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y^2}$.

584. $x\frac{dz}{dy} + y\frac{dz}{dy} = \frac{xy}{z}$.

585. $y^3\frac{dz}{dy} - xy^2\frac{dz}{dx} = axz$.

586. $\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = e^{mx}\cos py$.

587. $\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz} = xyz$.

588. $(y + x)\frac{dz}{dx} + (y - x)\frac{dz}{dy} = z$.

589. $\text{séc}\, x\frac{dz}{dx} + a\frac{dz}{dy} = z\cot y$.

590. $(y - bz)\frac{dz}{dx} - (x - az)\frac{dz}{dy} = bx - ay$.

591. $x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = \frac{x^3}{y}$.

592. $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 2xy(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$.

593. $x\frac{dz}{dx} + (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dy} = xy$.

594. $x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = au + \frac{xy}{z}$.

595. $(y + z + u)\frac{du}{dx} + (z + u + x)\frac{du}{dy}$

$+ (u + x + y)\frac{du}{dz} = x + y + z$.

§ XIX. — *Calcul des variations.*

596. Trouver la fonction qui rend maximum l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[1 - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + ay^2\right]dx.$$

597. Par deux points donnés A et B faire passer une courbe plane telle, que la surface comprise entre l'arc AB, les rayons de courbure extrêmes, et l'arc de développée correspondant, ait une valeur minimum.

598. Trouver la courbe qui rend maximum ou minimum l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho^n \, ds,$$

ρ désignant le rayon de courbure et ds l'élément de l'arc.

599. Trouver la courbe qui rend maximum ou minimum l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

600. Trouver la courbe qui rend maximum ou minimum l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^n \, ds.$$

601. Plus courte distance de deux points sur la surface d'un cylindre quelconque. Cas du cylindre droit.

602. Parmi toutes les courbes planes passant par deux points fixes, tournant autour du même axe situé dans leur plan, et engendrant une aire de révolution donnée, trouver celle qui donne lieu au volume de révolution maximum.

603. Par deux points donnés A et B on abaisse sur une droite OX deux perpendiculaires AC, BD; déterminer un arc de courbe AMB, de longueur donnée, de manière que l'aire constante AMBDC tournant autour de OX engendre un volume maximum ou minimum.

604. Faire passer par deux points donnés une courbe

telle, que le produit de l'arc par l'aire comprise entre cet arc, l'axe des x et les ordonnées extrêmes, soit un minimum.

605. Trouver la courbe qui, passant par deux points donnés, rend maximum ou minimum l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} s^n dx,$$

s désignant la longueur de l'arc.

606. Parmi toutes les courbes de même longueur, trouver celle qui, passant par deux points donnés, rend minimum l'expression

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} \varphi . x ds}{\int_{x_0}^{x_1} \varphi ds},$$

φ étant une fonction connue de l'arc s.

607. u désignant une fonction des quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$, homogène du degré p par rapport aux dérivées, si $\int_{x_0}^{x_1} u dx$ est un maximum ou un minimum, on a toujours

$$u = \text{const.}$$

pour les valeurs de p autres que l'unité.

CALCUL INTÉGRAL.

SOLUTIONS.

FORMULES FONDAMENTALES.

(a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, excepté pour $n = -1$.

(b) $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$.

(c) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

(d) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

(e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$.

(f) $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C$.

(g) $\int \frac{-dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} + C$.

(h) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C$.

(i) $\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,séc} \frac{x}{a} + C$.

(k) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$.

A ces formules on peut ajouter les suivantes, qui sont d'un fréquent usage:

$$(l)\quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C.$$

$$(m)\quad \int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = \log\left[\frac{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + x}{a}\right] + C.$$

$$(n)\quad \int \frac{dx}{x(a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\log\left[\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}} + a}\right] + C.$$

Nous désignerons ordinairement par S l'intégrale cherchée, abstraction faite de la constante.

§ I. — *Intégration par substitution.*

324. $$S = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{[a^4 - (x^2)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{x^2}{a^2}.$$

325. $$S = \frac{1}{2a^2}\,\text{arc tang}\,\frac{x^2}{a^2}.$$

326. $$S = \int \frac{d.(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{[b^2 - a^2 - (x^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}} = \text{arc sin}\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

327. $$S = \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}}.$$

Si l'on a $4ac - b^2 > 0$, on intègre au moyen de (h); si $4ac - b^2 < 0$, au moyen de (l); si enfin $4ac - b^2 = 0$, on tombe dans le cas de la formule (a). Ce dernier résultat se tire aussi des deux autres par la théorie des expressions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

328. $$S = c^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

quand on prend le signe +, et

$$S = c^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\left[\frac{4ac + b^2}{4c^2} - \left(x - \frac{b}{2c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

quand on prend le signe —. La première expression s'intègre au moyen de (m), la deuxième au moyen de (f).

329. $$S = \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} + \frac{a}{2} \int \frac{(2x + p)\,dx}{x^2 + px + q}.$$

Cette expression s'intègre au moyen du n° 327 et de la formule (b).

Comme application, on trouve

$$\int \frac{(1 - x\cos\theta)\,dx}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = \sin\theta \operatorname{arc\,tang} \frac{x - \cos\theta}{\sin\theta} - \cos\theta \log(1 - 2x\cos\theta + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La décomposition de cette intégrale en deux autres s'obtient rapidement, si l'on observe qu'on a

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta.$$

330. Si l'on multiplie haut et bas sous le signe par $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$S = \int \frac{(1 + x)\,dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,sin} x - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. — Il est souvent utile d'opérer comme dans cet exemple.

331. $S = (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - a \text{ arc séc } \frac{x}{a}$. Formule ($i$).

332. $S = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + a \log \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + a}$. Formule ($n$).

333. $S = \text{arc séc } \frac{x}{a} + \log \frac{x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$. Formule ($m$).

334. $S = \frac{a}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}}\right]$. Rem. du n° 330.

Si $a = b$, cette formule donne encore l'intégrale demandée, comme on le voit par la théorie des fonctions qui prennent la forme $\frac{0}{0}$.

335. $S = \int \frac{x^{-3}dx}{(ax^{-2} + b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a(a + bx^2)^{\frac{1}{2}}}$.

336. $S = \int \frac{x^{-3}dx}{(x^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$.

337. $S = \frac{x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}}$.

338. $S = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d.x^2}{\left[\frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$.

$$= \frac{a^2}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)}{\left[\frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{z\,dz}{\left(\frac{a^4}{4} - z^2\right)^{\frac{1}{2}}};$$

en posant

$$x^2 - \frac{a^2}{2} = z.$$

La première intégrale se réduisant à $\frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, il

en résulte

$$S = \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\sin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

339. $$S = \int \frac{a^2\,dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\sin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (n° 338).}$$

340. $$S = \int \frac{x^{-2}\,dx}{(ax^{-2} + bx^{-1} + c)^{\frac{1}{2}}} = -\int \frac{d.x^{-1}}{(ax^{-2} + bx^{-1} + c)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette expression s'intègre comme celle du n° 328.

341. $$S = \int \frac{dx}{\left[\left(c^{\frac{1}{2}}x + \frac{b}{2c^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2(2cx + b)}{(4ac - b^2)(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ (n° 337).}$$

342. $$S = \int \frac{x^{-2}\,dx}{(ax^{-2} + bx^{-1} + c)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{2(2a + bx)}{(4ac - b^2)(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ (n° 337).}$$

343. $$S = \int dx\,e^x \left[\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{(1 + x)^2}\right].$$

Sous cette forme, on voit que le second terme de la parenthèse est la dérivée du premier; et comme la dérivée de e^x est e^x, on en conclut que l'expression sous le signe est la dérivée du produit $e^x \frac{1}{1 + x}$.

344. $$S = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x} + 1} = \log \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

345. $S = \int (\text{séc}^2 x - 1)\, dx = \text{tang}\, x - x.$

346. $S = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = -2 \cot 2x.$

347. $S = \frac{1}{a} \int \frac{d.\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{a} \text{tang}\, \frac{x}{2}.$

348. $$S = \int \frac{dx}{(a+b)\cos^2 \frac{x}{2} + (a-b)\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{(a+b) + (a-b)\,\text{tang}^2 \frac{x}{2}}$$

En posant $\text{tang}\, \frac{x}{2} = z$, on trouve

$$S = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \text{arc cos} \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}, \quad \text{pour } a > b;$$

et

$$S = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \log \frac{(b+a)^{\frac{1}{2}} + (b-a)^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\, \frac{x}{2}}{(b+a)^{\frac{1}{2}} - (b-a)^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\, \frac{x}{2}}, \quad \text{pour } a < b.$$

Pour $a = b$, ces résultats prennent la forme $\frac{0}{0}$. En leur appliquant la règle connue, on retrouve l'intégrale du numéro précédent.

349. $S = (ab)^{-\frac{1}{2}} \text{arc tang} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \text{tang}\, x \right]$ (n° 348).

350. $S = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\, x}{2^{\frac{1}{2}}}\right).$

Ce résultat peut se déduire du précédent.

351. $S = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sin x (1 + a^2\cos^2 x - 1)}{1 + a^2\cos^2 x}\, dx$

$$= -\frac{\cos x}{a^2} + \frac{1}{a^3}\text{arc tang}(a \cos x).$$

352. $S = \int \frac{\cos x\, dx}{a\cos x + b\sin x}.$

Retranchant et ajoutant $\frac{a}{a^2+b^2}$ à la quantité sous le signe, il vient

$$S = \frac{1}{a^2+b^2}[ax + b\log(a\cos x + b\sin x)].$$

353. $S = \int \frac{\sin x\, dx}{[b - (b-a)\cos^2 x]^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}\text{arc cos}\left[\left(\frac{b-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x\right].$$

354. Au moyen des formules qui permettent de transformer en une somme un produit de sinus et de cosinus, on trouve

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right).$$

§ II. — *Intégration par parties.*

355. $S = \frac{x \text{ arc sin } x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \log(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$

356. $S = x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ arc sin} x.$

357. $S = (x+a)\text{ arc sin}\left(\frac{x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}} - (ax)^{\frac{1}{2}}.$

358. $S = \frac{x^2}{2} \text{arc sin} \frac{1}{2}\left(\frac{2a - x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{x^2\,dx}{(4a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{x^2}{2} \text{arc sin} \frac{1}{2}\left(\frac{2a - x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{x}{2a} - \frac{x}{8}(4a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

359. $S = x \text{ arc tang } x - \log(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$

360. $S = \left(x - \frac{1}{2}\text{arc tang } x\right) \text{arc tang } x - \log(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$

361. En intégrant deux fois par parties, on trouve

$$S = \frac{e^{a \text{ arc tang } x}(a + x)}{(1 + a^2)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

362. $S = \frac{e^{a \text{ arc tang } x}(ax - 1)}{(1 + a^2)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

§ III. — *Intégration par les fractions rationnelles.*

363. $S = \frac{1}{3}\log\frac{(x + 1)^2(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)^2}.$

364. $S = \frac{a_1^p \log(x - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)}$

$$+ \frac{a_2^p \log(x - a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n)} + \ldots + \frac{a^p \log(x - a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})}.$$

365. $S = \log\frac{x^{\frac{3}{2}}(x + 1)}{(x + 2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x}.$

366. $S = \frac{4}{x + 2} + \log(x + 1).$

367. Si l'on a généralement

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)(x-a)^n}$$
$$= \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

f et F désignant des fonctions qui n'ont pas de facteurs communs et $\varphi(x)$ n'étant pas divisible par $x-a$, il est aisé de démontrer que A_p est égal à ce que devient $\frac{1}{1.2\ldots p}\frac{d^p\left(\frac{fx}{\varphi x}\right)}{dx^p}$ quand on y remplace x par a. En s'appuyant sur cette remarque, on trouve

$$\frac{1}{x^n(1-x)^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(1-x)^n} + n\left[\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{(1-x)^{n-1}}\right]$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2}\left[\frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{(1-x)^{n-2}}\right] + \ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+\overline{n-2})}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right);$$

par suite

$$S = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}\right] + \frac{n}{n-2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}}\right] + \ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\overline{n-2})}{1.2.3\ldots(n-1)}\log\frac{x}{1-x}.$$

368. $S = \frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{2^{\frac{1}{2}}}.$

369. $S = \frac{3}{4}\log\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{5}{2(x-1)}.$

370. $S = \frac{1}{90}\log\frac{(x^2-x+3)(x+1)^{18}}{x^{20}} - \frac{1}{3x}$
$$- \frac{13}{45.11^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x-1}{11^{\frac{1}{2}}}.$$

371. $S = \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\, x + \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$

372. $S = -\frac{5x-7}{3(x^2-x+1)} - \frac{2}{x-1} - \frac{25}{3^{\frac{3}{2}}}\cdot \text{arc tang}\,\frac{2x-1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$- \log\frac{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}{x-1}.$

373. $S = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1+2^{\frac{1}{2}}x+x^2}{1-2^{\frac{1}{2}}x+x^2} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{2^{\frac{1}{2}}x}{1-x^2}.$

374. $S = \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\, x.$

375. $S = \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\, x.$

376. $S = \frac{1}{6}\log\frac{1+x}{1-x}\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2.3^{\frac{1}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{1-x^2}.$

§ IV. — *Expressions qu'on intègre en les rendant rationnelles.*

377. $S = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right].$

378. $S = a^{-\frac{1}{2}}\log\frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(a+bx)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}.$

379. $S = 2a^{-\frac{1}{2}}\,\text{arc tang}\left(\frac{bx-a}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 2a^{-\frac{1}{2}}\,\text{arc cos}\left(\frac{a}{bx}\right)^{\frac{1}{2}}.$

380. $S = (x-1)^{\frac{1}{2}}\,\frac{3x+2}{4x^2} + \frac{3}{4}\,\text{arc cos}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$

381. $S = 2(a+x)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(a+x)^2}{7} - \frac{2a(a+x)}{5} + \frac{a^2}{3}\right].$

382. $S = \frac{2}{b^2} \frac{2a + bx}{(a + bx)^{\frac{1}{2}}}$.

383. $S = \frac{2(a^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}{b^2} \left(\frac{a + bx}{7} - \frac{a}{5} \right)$.

384. $S = \frac{2}{3b^3} \frac{3(a + bx)^2 + 6a(a + bx) - a^2}{(a + bx)^{\frac{1}{2}}}$.

385. $S = \frac{3(a + x)^{\frac{4}{3}}}{4} \left(\frac{4x - 3a}{7} \right)$.

386. $S = 3(a + x)^{\frac{5}{3}} \left[\frac{(a + x)^3}{14} - \frac{3a(a + x)^2}{11} + \frac{3a^2(a + x)}{8} - \frac{a^3}{5} \right]$.

387. $S = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{6.4} + \frac{5.3.x}{6.4.2} \right) - \frac{5.3}{6.4.2} \log \left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$.

388. $S = -\frac{x(x^2 - 3)}{2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \arcsin x$.

389. $S = -\frac{a + 2bx^2}{a^2 x (a + bx^2)^{\frac{1}{2}}}$.

390. $S = \frac{x(2x^2 + 3)}{3(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

391. $S = \frac{x^3}{3a(a + bx^2)^{\frac{3}{2}}}$.

392. $S = \frac{3}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\log \frac{x^{\frac{1}{6}} - 2^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{12}} + 1}{x^{\frac{1}{6}} + 2^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{12}} + 1} + 2 \,\mathrm{arc\,tang} \frac{2^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{12}}}{1 - x^{\frac{1}{6}}} \right)$.

393. $S = 2 \,\mathrm{arc\,tang} (1 + x)^{\frac{1}{2}}$.

394. $S = 2^{-\frac{1}{2}} \text{arc tang} \dfrac{2^{\frac{1}{2}} x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

395. $S = 2^{\frac{1}{2}} \log \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

396. $S = \dfrac{1}{(bh^2 - ahk)^{\frac{1}{2}}} \log \dfrac{h(a+bx)^{\frac{1}{2}} + x(bh^2 - ahk)^{\frac{1}{2}}}{(h+kx^2)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $ak - bh < 0$;

$$S = \frac{1}{(ahk - bh^2)^{\frac{1}{2}}} \text{arc sin} \, x \left(\frac{ak - bh}{ah + akx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

pour $ak - bh > 0$;

$$S = \frac{x}{h(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{pour } ak - bh = 0.$$

397. $S = \dfrac{2}{na^{\frac{1}{2}}} \log \dfrac{(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(bx^n)^{\frac{1}{2}}}$.

398. En posant

$$a^{\frac{1}{2}} x^n = b^{\frac{1}{2}} \text{séc}\, \varphi,$$

il vient

$$S = \frac{1}{nb^{\frac{1}{2}}} \text{arc séc} \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} x^n}{b^{\frac{1}{2}}}\right).$$

399. $S = \text{arc tang} \dfrac{1+3x}{2(1+x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

400. $S = \log \dfrac{3 + x - 2(1 - x - x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$.

401. Cette expression est rendue rationnelle en posant

$$x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = z^n.$$

On tire en effet de là

$$x = \frac{z^{2n} - 1}{2z^n}, \quad dx = \frac{n(z^{2n} + 1)\,dz}{2z^{n+1}},$$

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}.$$

On trouve, comme application,

$$\int \frac{\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{m}{n}}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{n}{m}\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{m}{n}}.$$

402. Soit fait

$$z = \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{1 - x^2};$$

$$S = 2^{-\frac{1}{2}} \log \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}x}{1 - x^2}.$$

403. Posons

$$z = \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{(1 + x^4)^{\frac{1}{2}}};$$

$$S = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \log \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}x}{1 - x^2} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,sin} \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{1 + x^2}.$$

404. En faisant la même hypothèse que dans le numéro précédent, on trouve

$$S = 2^{-\frac{5}{2}} \log \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}x}{1 - x^2} - 2^{-\frac{5}{2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{1 + x^2}.$$

405. $z = \dfrac{x}{\left[(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2\right]^{\frac{1}{2}}};$

$$S = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\left[(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

406. $$z = \frac{x}{\left[(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

$$S = \text{arc tang}\, \frac{x}{\left[(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

407. Si on pose

$$z = \frac{(2x^m - 1)^{\frac{1}{2m}}}{x},$$

il en résulte

$$S = \int \frac{z^{2m-2}\,dz}{1 - z^{2m}}.$$

Comme application on trouve

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}\log\frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}} + x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}} + x} - \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,\frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}{x}.$$

408. Posant

$$z = \frac{(2x^m - 1)^{\frac{1}{2m}}}{x^{\frac{1}{2}}},$$

il vient

$$S = 2\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{1 - z^{2m}}.$$

La plupart des exercices de ce paragraphe sont empruntés à Euler.

§ V. — *Intégration par réductions successives.*

409. $$S = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\,\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Si n est positif et entier, l'intégrale est ramenée à $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Pour $n = 4$, on trouve

$$S = \frac{1}{6}\frac{5}{a^2(a^2+x^2)^3} + \frac{5}{6.4}\frac{x}{a^4(a^2+x^2)^2} + \frac{5.3}{6.4.2}\frac{x}{a^6(a^2+x^2)} + \frac{5.3}{6.4.2}\frac{1}{a^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}.$$

410. $$S = -\frac{1}{2(p-1)}\frac{x^{n-1}}{(a^2+x^2)^{p-1}} + \frac{n-1}{2(p-1)}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

n et p étant positifs et entiers, l'intégrale se réduit à l'une des trois formes

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k}, \quad \int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^k}, \quad \int x^k\,dx,$$

où k désigne un nombre entier positif.

Pour $n = 4$, $p = 2$, on trouve

$$S = -\frac{x^3}{2(a^2+x^2)} + \frac{3}{2}\left(x - \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right).$$

411. $$S = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\,dx.$$

Pour $n = 5$,

$$S = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{5}{6.4}a^2x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5.3}{6.4.2}a^4x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5.3}{6.4.2}a^6\arcsin\frac{x}{a}.$$

412. $$S = \frac{1}{n-1}\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si n est impair, l'intégrale se ramène à

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \text{arc séc}\, x;$$

si n est pair, à

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

413. $$S = -\frac{1}{n-1}\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour $n = 6$,

$$S = -\frac{1}{5}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^5} + \frac{4}{5.3}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3} - \frac{4.2}{5.3}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

414. $$S = \frac{2x^n(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)b} - \frac{2n}{2n+1}\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour $n = 3$,

$$S = 2\left(\frac{x^3}{7b} - \frac{6}{7.5}\frac{ax^2}{b^2} + \frac{6.4}{7.5.3}\frac{a^2x}{b^3} + \frac{6.4.2}{7.5.3}\frac{a^3}{b^4}\right)(a+bx)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 4$, $b = 1$,

$$S = 2(a+x)^{\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{x^4}{9} - \frac{8}{9.7}ax^3 + \frac{8.6}{9.7.5}a^2x^2 \\ \quad - \frac{8.6.4}{9.7.5.3}a^3x + \frac{8.6.4}{9.7.5.3}.2a^4\end{array}\right].$$

415. $$S = -\frac{1}{(n-1)a}\frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{x^{n-1}} - \frac{b}{2a}\frac{2n-3}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}}(a+bx)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 3$,

$$S = \left(\frac{3b}{4a^2x} - \frac{1}{2ax^2}\right)(a+bx)^{\frac{1}{2}} + \frac{3b^2}{8a^2}\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\log\frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(a+bx)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}.$$

416. $$S = \frac{3x^n(a+bx)^{\frac{2}{3}}}{(3n+2)b} - \frac{3n}{3n+2}\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}.$$

Pour $n = 2$,

$$S = \frac{3(a+bx)^{\frac{2}{3}}}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^2}{8} - \frac{2}{5}a(a+bx) + \frac{a^2}{2}\right].$$

417. $$S = \frac{x^{n-1}(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}{nc} - \frac{n-1}{n}\frac{a}{c}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{2n-1}{2n}\frac{b}{c}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour $n = 3$, $a = 1$, $b = c = -1$,

$$S = -\frac{(1-x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{24}(8x^2 - 10x + 31) - \frac{17}{16}\arcsin\frac{2x+1}{5^{\frac{1}{2}}}.$$

418. $$S = \frac{-b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

En faisant $n = 2$, la dernière intégrale disparaît, et il vient

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)}$$
$$\times\left\{\frac{-b\sin x}{a+b\cos x} + \frac{2a}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]\right\}.$$

S pourra donc s'obtenir au moyen de cette dernière formule et de celle du n° 348.

On déduirait facilement de là

$$(a^2-b^2)\int\frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2}$$

$$=\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{2b}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\text{ arc tang}\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}\text{tang}\frac{x}{2}\right].$$

§ VI. — *Intégration des fonctions de plusieurs variables.*

Le type des différentielles à deux variables est

$$X\,dx+Y\,dy.$$

419. Le caractère d'intégrabilité

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx}$$

étant satisfait, on trouve, en intégrant d'abord par rapport à y,

$$u=by^2+\int dx\left[a+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]=by^2+ax+\log C\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

420. Intégrant d'abord par rapport à y et observant que X n'a pas de termes renfermant y seul, on trouve

$$u=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}+C.$$

La remarque dont nous profitons ici a de l'importance; elle abrége souvent les calculs.

421. $u=\log C\left[x+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right].$

422. $u=\frac{x^4}{4}+a^2xy+b^2y+C.$

423. $u=\frac{3x^2y^2}{2}-\frac{x^3}{3}-y-2y^3+C$

424. $u = a(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + \text{arc tang}\,\frac{x}{y} + by^2 + C.$

425. $u = \log(y - x) - \frac{y}{y - x} + C.$

426. $u = x\sin y + y\sin x + C.$

427. Les conditions d'intégrabilité de l'expression

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

étant satisfaites, la règle donne

$$u = \frac{xy}{a - z} + C.$$

428. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \text{arc tang}\,\frac{x}{z} + \frac{z^2}{2} + C.$

429. $u = xy + yz + zx + C.$

430. $u = \frac{ax - by}{z} + C.$

§ VII. — *Quadrature des courbes planes.*

On désignera généralement par A l'aire considérée.

431. Il faut calculer

$$-\int (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy. \quad (\text{N}^{\circ}\ 339.)$$

Si l'on prend a et o pour limites, cette expression se réduit à $\frac{\pi a^2}{4}$. Telle est donc la portion de surface comprise entre la courbe et les parties positives des axes.

432. L'équation de la courbe étant

$$y^2(2a - x) = x^3,$$

on trouve, en intégrant par parties,

$$A = -2x(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} + 3\int (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

La portion de plan comprise entre l'asymptote et la courbe est égale à trois fois l'aire du cercle de rayon a.

433. $A = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a(y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$.

434. L'équation de la courbe étant $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, on est conduit à une différentielle binôme. Le calcul donne $\frac{3\pi\alpha 6}{8}$ pour l'aire totale.

On arrive plus rapidement à ce résultat au moyen du théorème suivant, dû à M. Lejeune-Dirichlet. Soit

$$V = \int dx \int dy \int dz \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots.$$

Les limites étant données par la condition qu'on ait toujours

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{6}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots \overline{\overline{<}}\, 1,$$

et les quantités $a, b, c, \ldots, \alpha, 6, \gamma, \ldots, p, q, r, \ldots$, étant positives, la fonction V aura pour valeur

$$\frac{\alpha^a 6^b \gamma^c}{pqr} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}.$$

Or, l'aire cherchée A a pour expression $4\int\int dx\,dy$, les limites des intégrales étant assujetties à la condition

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

on a donc

$$\frac{A}{4} = \frac{9\alpha 6}{4} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(4)}.$$

D'ailleurs,

$$\Gamma(4) = 1.2.3, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2},$$

puisqu'on a généralement

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1) \quad \text{et} \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n);$$

et comme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$, on retombe sur la formule déjà obtenue. Le théorème de M. Lejeune-Dirichlet se trouve dans le tome IV du *Journal* de M. Liouville.

435. En employant les coordonnées polaires, il vient

$$A = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\theta + C.$$

L'aire totale est égale à a^2.

436. $A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{4}\log\frac{1+\tang\theta}{1-\tang\theta}.$

On tire de là

$$\tang\theta = \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{e^{2A} + e^{-2A}}, \quad r^2 = e^{4A} + e^{-4A}.$$

La courbe est une hyperbole équilatère ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si l'on exprime aussi les coordonnées x et y en fonction de A, on trouve,

$$x = \frac{e^{2A} + e^{-2A}}{2}, \quad y = \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2}.$$

La grande analogie de ces résultats avec les formules connues,

$$\cos 2A = \frac{e^{2Ai} + e^{-2Ai}}{2}, \quad \sin 2A = \frac{e^{2Ai} - e^{-2Ai}}{2i},$$

a fait donner à l'abscisse le nom de *cosinus hyperbolique* de $2A$, et à l'ordonnée celui de *sinus hyperbolique* de la même grandeur, ce qui conduit à écrire généralement sous forme abrégée

$$\text{(H)} \qquad \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \cos h\,\alpha, \qquad \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \sin h\,\alpha.$$

On aura de même

$$\tan g\, h\,\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}.$$

Si l'on rapproche de l'hyperbole considérée le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

en appelant A_1 le secteur circulaire correspondant au même angle θ que le secteur hyperbolique A, on trouve que l'abscisse et l'ordonnée du point déterminé sur le cercle par cet angle θ ont respectivement pour valeurs $\cos 2A_1$ et $\sin 2A_1$, ce qui rend plus complète encore l'analogie qu'on vient de signaler.

Les *fonctions hyperboliques* (H) jouent un rôle important dans plusieurs questions de calcul, notamment dans le Calcul intégral et la Mécanique. Lambert s'en est beaucoup occupé et en a le premier donné une petite Table (1770); le travail le plus récent et le plus étendu sur cette matière est dû à Gudermann (*Journal de Crelle*, t. VI et suiv.). Les meilleures Tables de ces fonctions ont été publiées, en 1863, par M. Gronau (Dantzig).

437. (*Fig.* 24.) Pour avoir l'aire enfermée dans la ligne ODCAHG, on intègre depuis $\theta = 0$ jusqu'à la première valeur de θ qui annule le rayon vecteur, et on double le résultat. Soit α cette valeur fournie par l'équation de la

courbe, on trouve

$$\text{aire ODCAHG} = \frac{1}{2}\left[(a^2 + 2b^2)\,\alpha + 3b\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

On a aussi

$$\text{aire OEBF} = \frac{1}{2}\left[(a^2 + 2b^2)(\pi - \alpha) - 5b\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Roberval, qui a calculé le premier l'aire de cette courbe, lui a donné le nom de *limaçon de Pascal*. C'est une conchoïde du cercle, c'est-à-dire qu'elle se construit comme la conchoïde en substituant un cercle à la droite fixe qui sert à décrire cette courbe, à condition de prendre l'origine des rayons vecteurs sur un point de la circonférence. Le limaçon de Pascal est aussi une épicycloïde. Cette courbe est en même temps un cas particulier des *ovales de Descartes* ou *courbes aplanétiques* (Chasles, *Histoire de la Géométrie*, note 21.)

438. $A = \frac{1}{2}\left[a^2 \operatorname{tang}\theta + 2ab \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + b^2\theta\right] + C.$

439. En faisant usage des coordonnées du n° 268, on trouve facilement

$$r^2 d\theta = p ds = p\,(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\int_0 r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{pr\,dr}{(r^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Appliquant cette formule à l'épicycloïde, dont l'équation prend la forme

$$p^2 = \frac{(a + 2b)^2 (r^2 - a^2)}{(a + 2b)^2 - a^2} = \frac{c^2 (r^2 - a^2)}{c^2 - a^2},$$

il vient

$$A = \frac{c}{2a}\int \frac{rdr(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(c^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{2a}\int \frac{rdr\,(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{[c^2-a^2-(r^2-a^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{c\,(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(c^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{4a} + \frac{c\,(c^2-a^2)}{4a}\,\text{arc}\sin\left(\frac{r^2-a^2}{c^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de là que l'aire engendrée par le rayon vecteur pendant une révolution entière du cercle mobile a pour expression

$$\frac{c\,(c^2-a^2)\,\pi}{4a} = \frac{\varpi b}{a}(a^2+3ab+2b^2),$$

en remplaçant c par sa valeur $a+2b$.

Cette expression renferme, outre l'aire comprise entre le cercle fixe et l'épicycloïde, un secteur du cercle fixe dont l'arc a pour longueur la circonférence mobile. Ce secteur ayant pour valeur ϖab, la surface restante est égale à

$$\frac{\varpi b^2}{a}(3a+2b).$$

440. En coordonnées polaires la courbe a pour équation

$$r^2 = \frac{a^2 \sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta};$$

par suite,

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta} = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \frac{\text{tang}\,\theta\; d(\text{tang}\,\theta)}{1+\text{tang}^4\theta}$$

$$= \frac{a^2}{4}\,\text{arc tang}\,(\text{tang}^2\theta).$$

L'aire contenue dans la portion formée de la courbe est donc égale à $\frac{\pi a^2}{8}$.

441. Par un changement d'axes de coordonnées, l'équation prend la forme

$$y = x\sqrt{\frac{a - x\sqrt{2}}{a + 3x\sqrt{2}}}.$$

En posant $a - x\sqrt{2} = z^2$, il vient

$$S = -\int \frac{(a - z^2)\, z^2 dz}{\sqrt{4a - 3z^2}}.$$

Or,

$$\int \frac{z^4 dz}{\sqrt{4a - 3z^2}} = -\frac{1}{3}\int z^3 d\sqrt{4a - 3z^2}$$

$$= -\frac{z^3}{3}\sqrt{4a - 3z^2} + \int \frac{4az^2}{\sqrt{4a - 3z^2}}dz - 3\int \frac{z^4 dz}{\sqrt{4a - 3z^2}};$$

donc

$$4\int \frac{z^4 dz}{\sqrt{4a - 3z^2}} - 4a\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{4a - 3z^2}} = -\frac{z^3}{3}\sqrt{4a - 3z^2}.$$

On a, par conséquent,

$$S = -\frac{z^3}{12}(4a - 3z^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

On déduit de là que l'aire de la courbe renfermée dans la boucle est égale à $\frac{a^2}{6}$, et il en est de même pour la surface comprise entre la courbe et son asymptote.

Cette courbe, que Roberval appelait *feuille de jasmin*, a été signalée par Descartes dans une de ses lettres comme échappant à la méthode des tangentes donnée par Fermat. C'est Huyghens qui en a le premier trouvé la quadrature.

§ VIII. — *Rectification des courbes.*

On désignera généralement l'arc cherché par S.

442. La longueur totale de la courbe est égale à $6a$.

443. Le rapport de l'arc à l'aire correspondante est égal à $\frac{1}{a}$.

444. $S = a \log \frac{y}{a}$, l'arc étant supposé nul pour $y = a$.

445. $S = \frac{a}{2} \int \frac{1}{a-x} \left(\frac{4a-3x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx + C.$

Soit fait

$$\frac{4a-3x}{a-x} = z^2,$$

il vient

$$S = a\left(z + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \log \frac{3^{\frac{1}{2}} - z}{3^{\frac{1}{2}} + z}\right) + C,$$

et enfin, en supposant que l'arc soit nul pour $x = 0$,

$$S = a\left[\left(\frac{4a-3x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \log \frac{[3(a-x)]^{\frac{1}{2}} - (4a-3x)^{\frac{1}{2}}}{[3(a-x)]^{\frac{1}{2}} + (4a-3x)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

446. Quand une courbe est la développée d'une courbe connue, il suffit, pour la rectifier, de prendre la différence des rayons de courbure de la développante qui correspondent aux extrémités de l'arc dont on veut trouver la longueur. Ainsi, en observant que dans l'ellipse le rayon de courbure est $\frac{b^2}{a}$ à l'extrémité du grand axe et $\frac{a^2}{b}$ à celle du petit, on a

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}$$

pour le quart de la longueur de la développée.

447. En faisant usage des notations du n° 439, on trouve

généralement

$$ds = \frac{rdr}{(r^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}};$$

par suite, si la courbe est une épicycloïde,

$$S = \frac{(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \int \frac{rdr}{(c^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} (c^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Pour une révolution du cercle mobile

$$S = 8 \frac{b}{a} (a + b);$$

et dans le cas de l'hypocycloïde

$$S = 8 \frac{b}{a} (a - b).$$

448. En employant des coordonnées polaires, on a

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi;$$

d'où l'on déduit pour les équations de la courbe

$$\sin \varphi \left(e^{n\theta} + e^{-n\theta}\right) = 2,$$
$$r = a.$$

On tire des mêmes formules, en observant que r est constant,

$$ds^2 = a^2 (\sin^2 \varphi \, d\theta^2 + d\varphi^2).$$

La première équation de la courbe nous donne

$$nd\theta = \pm \frac{d\varphi}{\sin \varphi};$$

d'où

$$ds = \frac{a (1 + n^2)^{\frac{1}{2}}}{n} d\varphi,$$

et, par suite,

$$S = a \int_0^{\pi} \frac{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}{n} d\varphi = \pi \frac{a(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

La loxodromie est la courbe qu'un vaisseau décrit sur la mer en coupant tous les méridiens sous le même angle. Maupertuis en a étudié les propriétés (*Mémoire sur la parallaxe de la Lune* et *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1744).

449. Les tangentes en m_1 et m_2 étant parallèles entre elles, on a

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{d(a_1 y_1 + a_2 y_2)}{d(a_1 x_1 + a_2 y_2)} = \frac{dy}{dx};$$

la tangente en m leur est donc aussi parallèle; par conséquent

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx_1}{ds_1} = \frac{dx_2}{ds_2} = \frac{d(a_1 x_1 + a_2 x_2)}{d(a_1 s_1 + a_2 s_2)},$$

d'où

$$s = a_1 s_1 + a_2 s_2,$$

en faisant commencer tous les arcs au point O.

450. En différentiant l'équation donnée, on trouve

$$dr_1 = 2a^2 \frac{a^8 - 6a^4 r^4 + r^8}{(a^4 + r^4)^2 \sqrt{a^4 + r^4}} dr.$$

D'ailleurs,

$$a^4 - r_1^4 = a^4 \frac{(a^4 + r^4)^4 - 16 a^4 r^4 (a^4 - r^4)^2}{(a^4 + r^4)^4};$$

d'où résulte

$$\frac{dr_1}{\sqrt{a^4 - r_1^4}} = 2 \cdot \frac{a^8 - 6a^4 r^4 + r^8}{\sqrt{(a^4 + r^4)^4 - 16 a^4 r^4 (a^4 - r^4)^2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}};$$

or, on a

$$(a^8 - 6a^4r^4 + r^8)^2 = (a^4 + r^4)^4 - 16a^4r^4(a^4 - r^4)^2;$$

par conséquent,

$$\int_0^{r_1} \frac{dr_1}{\sqrt{a^4 - r_1^4}} = 2\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

C. Q. F. D.

Ce résultat est dû à Fagnano.

451. En désignant par s la moitié de la longueur de la première courbe, par s_1 un arc quelconque de l'hyperbole, on trouve

$$s = a^{\frac{2}{3}} \int_0^a \frac{dr}{\left(a^{\frac{4}{3}} - r^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad s_1 = \int_a^r \frac{r^2\,dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il faut démontrer qu'on a

$$s = 3\,\text{lim.}\,(s_1 - r),$$

quand on suppose que r croît indéfiniment. Pour rapprocher les formes des intégrales qu'il s'agit de comparer, faisons dans la première $r = az^3$, et dans la seconde $a = rz$; il vient

$$s = 3a\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}}, \quad s_1 = \int_z^1 \frac{dz}{z^2(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$s_1 - r = a\left[\int_z^1 \frac{dz}{z^2(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{z}\right].$$

Or,

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dz}{z^2(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}\,dz}{z^2};$$

et comme on trouve, en intégrant par parties,

$$\int \frac{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}\,dz}{z^2} = -\frac{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}}{z} - 2\int \frac{z^2\,dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}},$$

il en résulte

$$\int_z^1 \frac{dz}{z^2(1-z^4)^{\frac{1}{2}}} \doteq \frac{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}}{z} - \int_z^1 \frac{z^2\,dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}},$$

et, par suite,

$$s_1 - r = a\left[\frac{1}{z} - \frac{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}}{z} \int_z^1 \frac{z^2\,dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

On conclut de là

$$\lim\,(s_1 - r) = a\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{s}{3}.$$

M. Faure (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853) a généralisé la question précédente en remplaçant l'hyperbole par la courbe qui a pour équation

$$r^m \cos m\theta = a^m.$$

§ IX. — *Cubature.*

On désignera généralement par V le volume cherché.

452. Le volume étant supposé nul pour $x = 0$, on a

$$\begin{aligned}
V &= \pi a\left(\frac{x^2}{2} + a^2\right)\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) - \pi a^2 x\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - 2\pi a^3 \\
&= \pi a^2 y\left[\log\frac{y + (y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right]^2 \\
&\quad - 2\pi a^2 (y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \log\frac{y + (y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} + 2\pi a^2 (y - a).
\end{aligned}$$

453. En prenant l'asymptote pour axe des x, la cissoïde a pour équation

$$x^2 y = (2a - y)^3;$$

il en résulte

$$V = \varpi \int y^2 dx = -\frac{\varpi}{2}\int_0^{2a} dy \left[3y^{\frac{3}{2}}(2a-y)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}(2a-y)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \varpi \int_0^{2a} dy\,(a+y)(2ay-y^2)^{\frac{1}{2}} = 2\varpi^2 a^3.$$

454. L'équation de la conchoïde étant

$$xy = (a+y)(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}},$$

le volume engendré par la révolution de cette courbe autour de l'axe des x a pour expression

$$V = \frac{\varpi^2 ab^2}{2} - \varpi ab^2 \arcsin\frac{y}{b} + \frac{\varpi}{3}(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(y^2+2b^2).$$

En faisant $y = 0$ et doublant le résultat, on trouve pour le volume total

$$\varpi b^2\left(\varpi a + \frac{4b}{3}\right).$$

455. Lorsque l'équation d'une courbe est donnée en coordonnées polaires, l'élément du volume de révolution, engendré par le secteur infiniment petit dont l'aire est $\frac{1}{2}r^2 d\theta$, a pour expression

$$\frac{2\pi}{3} r^3 \sin\theta\, d\theta.$$

On a donc ici

$$V = \frac{2\pi}{3}p^3 \int_{\theta_0}^{\theta} (1+e\cos\theta)^{-3} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\frac{p}{e}\int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{\pi p}{3e}(r^2 - r_0^2).$$

456. Le paraboloïde elliptique a pour équation

$$\frac{z^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2x.$$

Soit

$$y_1=(2bx)^{\frac{1}{2}};$$

on en déduit, V désignant le volume cherché,

$$V=\int_0^x\int_0^{y_1}z\,dx\,dy=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^x\int_0^{y_1}dx\,dy\,(2bx-y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\varpi}{4}x^2(ab)^{\frac{1}{2}}.$$

457. Si l'on désigne par y_1 une constante, on trouve

$$V=\frac{1}{c}\int_0^a\int_0^{y_1}y\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy=\frac{\varpi a^2 y_1^2}{8c}.$$

458. $V=\int_0^x\int_0^{y_1}dx\,dy\,x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

y_1 étant donnée par l'équation

$$\varphi\left(\frac{y_1}{x}\right)=0;$$

on a donc

$$y_1=\alpha x,$$

en désignant par α une constante. Soit fait $\frac{y}{x}=\omega$, il en résulte

$$V=\int_0^x\int_0^\alpha x^2dx\,\varphi(\omega)\,d\omega=\frac{x^3}{3}\int_0^\alpha\varphi(\omega)\,d\omega.$$

Appelons S l'aire de la section faite dans la surface par un plan parallèle à zy et à une distance x de ce plan, on

aura

$$S = \int_0^{\alpha x} z\,dy = x^2 \int_0^{\alpha} \varphi(\omega)\,d\omega,$$

et, par suite,

$$V = \frac{Sx}{3},$$

résultat facile à prévoir, puisqu'il s'agit d'une surface conique.

459. Soient

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2$$

les équations des deux cylindres; on a, en posant $y_1 = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{V}{8} = \int_0^a \int_0^{y_1} dx\,dy\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2a^3}{3}.$$

460. Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2$$

les équations de la sphère et du cylindre; on a

$$V = \int\int dz\,x\,dy.$$

Posons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

il viendra

$$\frac{V}{2} = \int_0^b \int_0^{2\pi} z\,r\,dr\,d\theta = \int_0^b \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta\,(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

461. Les surfaces ont pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

En opérant comme au numéro précédent, on trouve

$$\frac{V}{4} = \int_0^{a\cos\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dr d\theta (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Le volume cherché est donc

$$\frac{2\pi a^3}{3} - \frac{8}{9}a^3,$$

et la portion de la demi-sphère non comprise dans le cylindre est égale au neuvième du cube du diamètre de la sphère (n° 325). (Bossut.)

462. On a (n° 339)

$$\frac{V}{4} = \int\int dx\, dy (4ax - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} dx \left[x(4a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 4ax \arcsin\frac{1}{2}\left(\frac{2a-x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= a^3\left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}\right);$$

par suite,

$$V = a^3\left(\frac{16}{3} + 2\pi\right).$$

463. ABDC (*fig.* 25) représente la section faite dans le solide par le plan qui contient les deux axes. Le point le plus haut de la portion de volume située au-dessus de ABDC se projette en O, point de rencontre des diagonales de ce losange. A une distance z du plan des axes, menons un plan qui lui soit parallèle; la section obtenue se projettera en PQSR qui est sa vraie grandeur. Soient A la section, a le rayon de base commun aux deux cylindres, V le

volume cherché ; on aura

$$V = 2\int_0^a A\,dz.$$

Abaissons $OK = p$ perpendiculaire sur PQ, il en résulte

$$2p = PQ \sin\alpha, \quad A = \frac{4p^2}{\sin\alpha}.$$

D'ailleurs p, z et a formant un triangle rectangle,

$$p^2 = a^2 - z^2;$$

d'où enfin

$$V = \frac{8}{\sin\alpha}\int_0^a (a^2 - z^2)\,dz = \frac{16a^3}{3\sin\alpha}.$$

464. Il suffit d'évaluer le volume QEDB (*fig.* 26). AB est perpendiculaire à ED, trace du plan sécant sur la base dont le centre est C. Soit $PNnp = A$ la section faite par un plan perpendiculaire à la base et dont la trace Nn est parallèle à ED ; si l'on pose

$$CB = a, \quad CM = x, \quad MN = y, \quad PN = z,$$

on aura (n° 459)

$$V = \int_0^a A\,dx = 2\int_0^a yz\,dx.$$

Or

$$z = x\tan\alpha, \quad y^2 + x^2 = a^2;$$

donc

$$V = \frac{2}{3}a^3 \tan\alpha.$$

§ X. — *Quadrature des surfaces courbes.*

On désigne généralement par S la surface cherchée.

465. L'équation différentielle de la cycloïde étant

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2a}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$S=2\pi(2a)^{\frac{1}{2}}\int_0^y\frac{y\,dy}{\sqrt{2a-y}}$$
$$=\frac{4}{3}\pi(2a)^{\frac{1}{2}}\left[4a(2a)^{\frac{1}{2}}-(2a-y)^{\frac{1}{2}}(4a+y)\right].$$

Il suit de là que la surface engendrée par la révolution de la cycloïde entière a pour expression

$$\frac{64}{3}\pi a^2.$$

466. $$2\pi\int_0^\infty y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx=2\pi a^2.$$

467. Les équations des surfaces étant

$$x^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=a^2,$$

on tire de la première

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy}=0;$$

et, en posant $y_1=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$S=8a\int_0^a\int_0^{y_1}\frac{dx\,dy}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=8a^2.$$

468. $$S=a\int_0^a\int_0^{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dx\,dy}{(a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

ou, en prenant des coordonnées polaires,

$$S = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \frac{r dr d\theta}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

C'est l'expression de la surface enlevée par le cylindre au huitième de la sphère. La portion détachée de la sphère totale est donc quatre fois plus grande; et si, au lieu d'un cylindre, on en suppose deux égaux, extérieurs l'un à l'autre, mais ayant une génératrice commune qui passe par le centre, la surface détachée a pour expression $4\pi a^2 - 8a^2$, et par suite la surface restante est égale à deux fois le carré du diamètre.

Ce problème est celui que Viviani proposa, sous forme d'énigme, aux géomètres de son temps. Voici en quels termes il s'exprime dans les *Acta eruditorum* de 1692 :

Ænigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphæricæ, autore D. Pio Lisci Pusillo Geometra.

« Inter venerabilia olim Græciæ monumenta extat adhuc » perpetuo quidem duraturum, templum augustissimum » ichnographia circulari *almæ Geometriæ* dicatum, quod » testudine intus perfecte hemisphærica operitur; sed in » hac fenestrarum quatuor æquales areæ (circum ac supra » basin hemisphæræ ipsius dispositarum) tali configura- » tione, amplitudine, tantaque industria ac ingenii acu- » mine sunt extructæ, ut his detractis superstes curva » testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, » tetragonismi vere geometrici sit capax. » (N° 461.)

Sous l'anagramme qui cachait l'auteur, on trouve : *Postremo Galilei discipulo*. Le problème était en effet une épreuve à laquelle un des élèves les plus distingués de Galilée voulait soumettre la nouvelle analyse créée par

Leibnitz. Celui-ci en trouva la solution le jour même où le programme de Viviani lui parvint (*Acta erudit.*, 1692). Jacques Bernoulli résolut aussi la question et montra qu'on y pouvait arriver d'une infinité de manières. La construction géométrique donnée par Viviani lui-même est ingénieuse, mais manque de rigueur. Un religieux camaldule, Urbain Grandi, en fit connaître une plus satisfaisante en 1699. Il prouva en outre qu'on peut détacher d'un cône droit une portion de surface carrable, à laquelle il donna le nom de *voile du Camaldule;* mais cette remarque avait déjà été faite en 1696 par Jacques Bernoulli. La proposition est celle-ci : *Tout prisme droit dont la base s'appuie sur celle d'un cône droit détache du cône une surface dont le rapport à la base du prisme est égal à celui du côté du cône au diamètre de sa base.*

C'est Bossut qui a démontré le premier que le volume du *temple* de Viviani est égal aux deux neuvièmes du cube du diamètre de la sphère.

Euler a beaucoup généralisé le problème de Viviani (*Comm. nov. Acad. Petrop.*, 1759).

469. L'élément de la circonférence de base du cylindre étant

$$\frac{a}{2}\frac{dx}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a

$$\frac{S}{4}=\frac{a}{2}\int_0^a\frac{z\,dx}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}=a^2;$$

d'où

$$S=4a^2.$$

470. (*Voir* n° 464 et *fig.* 26.) *ds* désignant l'élément de

l'arc DNB, la surface QDNB a pour expression

$$\int z\,ds = a \tang\alpha \int_0^a \frac{x\,dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = a^2 \tang\alpha.$$

L'aire de la surface QEBD est donc

$$2a^2 \tang\alpha.$$

§ XI. — *Changement de variables sous le signe d'intégration.*

471. La relation générale

$$dx\,dy = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) du\,dv$$

se réduit ici à

$$dx\,dy = u\,du\,dv;$$

on a donc

$$\iint x^m y^n dx\,dy = \iint u^{m+n+1}(1-v)^m v^n du\,dv.$$

Cette transformation a été donnée par M. Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XI); elle est d'un grand usage dans la recherche des intégrales définies.

472. $\iint e^{x^2+y^2} dx\,dy = \iint e^{r^2} r\,dr\,d\theta.$

473. $\iiint \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz = \iiint \mathrm{V} r^2 dr \sin\theta\,d\theta\,d\psi.$

On reconnaît ici la transformation usitée quand on passe des coordonnées rectangles aux coordonnées polaires.

474. Il résulte des équations données qu'on a

$$z = c\cos\theta, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{c\sin\theta\cos\varphi}{a\cos\theta},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{c\sin\theta\cos\varphi}{b\cos\theta}.$$

D'ailleurs,

$$dx\,dy = ab\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi;$$

l'intégrale prend alors la forme

$$\int\!\!\int d\theta\,d\varphi\,\sin\theta\left[a^2b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Ivory.)

§ XII. — *Intégrales définies.*

Formules généralement connues et d'un usage fréquent :

(A) $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}\,dx.$

(B) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \pi^{\frac{1}{2}}.$

(C) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$

(E) $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$

(F) $\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}$, m et n entiers.

(G) $(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

(H) $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad b > 0.$

K) $\int \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$

475. $u = \int_0^1 \frac{dx}{x\,F\left(x, \frac{1}{x}\right)} + \int_1^\infty \frac{dx}{x\,F\left(x, \frac{1}{x}\right)}.$

Posant $x=\frac{1}{z}$ dans la dernière intégrale, elle devient

$$-\int_1^0 \frac{dz}{zF\left(\frac{1}{z}, z\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{xF\left(x, \frac{1}{x}\right)}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

476. Soit

$$F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(y)\,dy;$$

il vient, en intégrant par parties,

$$\int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} f(y)\,dy = [x F(x)]_0^a - \int_0^a x \frac{dF}{dx} dx$$

$$= a \int_0^{\varphi(a)} f(y)dy - \int_0^a x f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

Si l'on fait

$$\varphi(x) = y, \quad \text{d'où} \quad x = \psi(y),$$

la seconde intégrale du second membre prend la forme

$$\int_0^a \psi(y) f(y)\,dy. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

477. Soit

$$u = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

une intégrale définie telle qu'on ait

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \psi(\alpha).$$

A ces limites on peut généralement en substituer d'autres quelconques, p et q, en posant

$$(1) \qquad x - a = \frac{b-a}{q-p}(z-p).$$

Si l'on suppose les nouvelles limites p et q indépendantes

de α, le changement de variable donne ici

$$u = \int_p^q f(x, \alpha) \frac{b-a}{q-p} dz,$$

relation où l'on regarde x comme remplacée par sa valeur en z tirée de l'équation (1). Il résulte de là

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_p^q \frac{df}{d\alpha} \frac{b-a}{q-p} dz + \lambda,$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda = \int_p^q \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\alpha} \frac{b-a}{q-p} dz + \int_p^q f(x, \alpha) \left(\frac{db}{d\alpha} - \frac{da}{d\alpha} \right) \frac{dz}{q-p}.$$

Revenant à la variable x, on a

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df}{d\alpha} dx + \lambda,$$

et

$$\lambda(b-a) = \int_a^b \left[\frac{df}{dx} \frac{dx}{d\alpha} (b-a) + f(x, \alpha) \left(\frac{db}{d\alpha} - \frac{da}{d\alpha} \right) \right] dx.$$

Or on déduit de (1)

$$(b-a) \frac{dx}{d\alpha} = \frac{da}{d\alpha}(b-x) + \frac{db}{da}(x-a),$$

et, par suite,

$$(b-a)\lambda = \frac{db}{d\alpha} \int_a^b \left[(x-a) \frac{df}{dx} + f(x, \alpha) \right] dx$$
$$+ \frac{da}{d\alpha} \int_a^b \left[(b-x) \frac{df}{dx} - f(x, \alpha) \right] dx;$$

d'où

$$\lambda = f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

478. Le multiplicateur de dx a x^{n-1} pour dérivée par rapport à n; d'ailleurs

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n};$$

si donc on multiplie les deux membres de cette égalité par dn et si l'on intègre, il viendra

$$\int_1^n dn \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\log x}\,dx = \log n.$$

On aurait de la même manière

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^n}{\log x}\,dx = \log\frac{m}{n},$$

ce qui se déduit aussi immédiatement du résultat qui précède.

479. Soit

$$x = \operatorname{tang}\varphi;$$

u devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{2^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\varphi\,d\varphi.$$

On voit sans calcul que les deux dernières intégrales se détruisent; donc

$$u = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

480. Considérons l'intégrale

$$\int_0^h e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx = \mathrm{A},$$

et faisons

$$z = \frac{a}{x};$$

il vient

$$A = \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} e^{-z^2} z^{-2}\, dz.$$

Or,

$$\int e^{-z^2} z^{-2}\, dz = -z^{-1} e^{-z^2} - 2\int e^{-u^2} du\,;$$

et, par suite,

$$A = he^{-\frac{a^2}{h^2}} - 2a\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

De même,

$$\int_0^h e^{-\frac{b^2}{x^2}} dx = Bhe^{-\frac{b^2}{h^2}} - 2b\int_{\frac{b}{h}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Si donc on fait croître h indéfiniment, on a

$$\lim(A - B) = (b - a)\,\pi^{\frac{1}{2}} + \lim h\left(e^{-\frac{a^2}{h^2}} - e^{\frac{b^2}{h^2}}\right);$$

et la limite qui figure au second membre étant nulle, il vient

$$u = (b -)\,\pi^{\frac{1}{2}}.$$

481. On trouve, au moyen de l'intégration par parties,

$$\int \frac{x \log x dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left[1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+ \left[1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right] \log x;$$

et, en ayant égard aux limites,

$$u = \log 2 - 1.$$

482. $$u = \lim \frac{\pi}{2n}\left[\log\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right) + \log\sin\left(\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\right) + \cdots + \log\sin\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \lim \frac{\pi}{2n}\log\left[\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2}{n}\frac{\varpi}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{n-1}{n}\frac{\varpi}{2}\right)\right],$$

n croissant indéfiniment.

On a, d'ailleurs, par le théorème de Cotes,

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = \left(z^2 - 2z\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\cdots \times\left(z^2 - 2z\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right).$$

Pour $z = 1$, cette identité nous donne

$$n = 2^{2(n-1)}\sin^2\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cdots\sin^2\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right);$$

et, par suite,

$$\frac{\log n - 2(n-1)\log 2}{2} = \log\left[\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\frac{\pi}{2n}$ et passons aux limites, il vient

$$u = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

483. Cette intégrale se ramène immédiatement à la précédente en posant

$$x = \sin u.$$

484. L'intégration par parties nous donne

$$\int \frac{x^2 \log x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\log x$$
$$+\frac{1}{2}\int dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\log x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En passant aux limites et tenant compte de l'intégrale du numéro précédent, il vient

$$u = \frac{\pi}{4}(1-\log 2).$$

485. $$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x}.$$

Faisons dans la seconde intégrale

$$x = \pi - y,$$

elle devient

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin y\,dy}{1+\cos^2 y} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\,dy}{1+\cos^2 y}.$$

On a donc simplement

$$u = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\,dy}{1+\cos^2 y} = \frac{\pi^2}{4}.$$

486. Cette intégrale, qui reproduit comme cas particulier celle du n° 482, quand on y fait $a=1$, peut s'obtenir de la même manière. Elle est égale à la limite de l'expression suivante :

$$\frac{\pi}{n}\left[\log\left(a^2 - 2a\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right) + \log\left(a^2 - 2a\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\log\left(a^2 - 2a\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right)\right],$$

quand n croît indéfiniment.

Cette valeur peut s'écrire

$$\frac{\pi}{n}\log\left[\left(a^2-2a\cos\frac{1}{n}\pi+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{2}{n}\pi+1\right)\right.$$
$$\left.\times\left(a^2-2a\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right)\right].$$

En vertu du théorème de Cotes, la quantité comprise entre les crochets est égale à

$$\frac{a^{2n}-1}{a^2-1};$$

donc

$$u=\lim\left\{\frac{\pi}{n}\log\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right\}.$$

Pour $a<1$, cette limite est o.
Pour $a>1$ elle est $\pi\log a^2$.

487. On a

$$\int\frac{\log x\,dx}{1+x}=\log x\log(1+x)-\int\frac{\log(1+x)\,dx}{x},$$

et, par suite,

$$u=-\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}\,dx.$$

Développant $\log(1+x)$ en série, il vient

$$u=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\ldots;$$

et comme on déduit des nos 134 et 137

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

l'intégrale cherchée a pour valeur $\frac{\pi^2}{12}$.

488. On trouve, au moyen de l'intégration par parties,

$$u = \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx.$$

D'un autre côté,

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx + \int_0^1 \frac{\log(1+x)\,dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \log\frac{(1-x^2)\,d.x^2}{x^2},$$

ou bien

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)\,dx}{x} = -2\int_0^1 \frac{\log(1+x)\,dx}{x} = -\frac{\pi^2}{6},$$

en vertu du numéro précédent.

Cette intégrale aurait pu s'obtenir aussi en développant $\log(1-x)$ en série.

On déduirait facilement de ce numéro et du précédent

$$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x} = \int_0^1 \frac{\log x\,dx}{2(1-x)} + \int_0^1 \frac{\log x\,dx}{2(1+x)} = -\frac{\pi^2}{8},$$

et

$$\int_0^1 \frac{x\log x\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log x^2 d.x^2}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{24}.$$

489. Supposons d'abord n pair et égal à $2a$. Le premier membre de l'égalité qu'il faut établir renferme donc $a-1$ facteurs de la forme $\Gamma(r)\,\Gamma(1-r)$, plus le facteur du milieu $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$. Ce premier membre peut donc s'écrire (formule E) :

$$\frac{\pi^{a-\frac{1}{2}}}{\sin\left(\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2}{a}\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a-1}{a}\frac{\pi}{2}\right)}.$$

D'ailleurs, on a trouvé (n° 482)

$$n.2^{-2(n-1)} = \sin^2\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cdots\sin^2\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right);$$

le produit considéré est donc bien égal à

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Si n est impair, le nombre des facteurs est pair, et en recourant encore à la théorie des équations binômes, on retrouve la valeur précédente.

490. On tire de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(formule B)},$$

en la différentiant n fois par rapport à a et posant ensuite $a = 1$,

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

491. Posons

$$\frac{x}{x+h} = \frac{y}{1+h},$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{h^b(1+h)^a}\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$$
$$= \frac{1}{h^b(1+h)^a}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{(formule G)}.$$

492. En différentiant par rapport à a l'équation connue (formule K)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

il vient

$$u = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

493. En multipliant par da les deux membres de la formule employée dans le numéro précédent, intégrant entre les limites o et ∞, puis déterminant la constante arbitraire de telle sorte que l'intégrale s'évanouisse avec a, on trouve

$$u = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a}).$$

494. On a, pour toutes les valeurs de a moindres que l'unité,

$$(1 - 2a\cos bx + a^2)^{-1}$$
$$= \frac{1}{1-a^2}(1 + 2a\cos bx + 2a^2\cos 2bx + 2a^3\cos 3bx + \ldots).$$

Multiplions par $\frac{dx}{1+x^2}$ les deux membres de cette égalité, puis intégrons entre les limites o et ∞ en tenant compte de la formule K; il viendra, toutes simplifications faites,

$$u = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1-a^2}\,\frac{1+ae^{-b}}{1-ae^{-b}}.$$

495. On a, pour toutes les valeurs de a moindres que l'unité,

$$\frac{\sin bx}{1 - 2a\cos bx + a^2} = \sin bx + a\sin 2bx + a^2\sin 3bx + \ldots;$$

multipliant les deux membres par $\frac{x\,dx}{1+x^2}$, intégrant entre les limites o et ∞ et ayant égard à l'intégrale du n° 492, il vient

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{e^b - a}.$$

496. En opérant comme dans le n° 494 et observant qu'on a toujours

$$\int_0^{\pi} \cos bx \cos b'x\,dx = 0,$$

tant que les nombres entiers b et b' sont différents l'un de l'autre, on trouve

$$u = \frac{\pi a^b}{1 - a^2}.$$

Si le nombre a surpasse l'unité, on obtient la formule

$$u = \frac{\pi}{a^b(a^2 - 1)}.$$

497. Différentiant par rapport à a, il vient

$$\frac{du}{da} = -2a \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)}.$$

Si l'on remplace $\frac{a}{x}$ par z, le second membre se réduit à $-2u$, ce qui donne

$$u = Ce^{-2a}.$$

Pour déterminer C, faisons $a = 0$ dans les deux valeurs de u; on trouve

$$C = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}};$$

et, par suite,

$$u = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-2a}.$$

498. On a

$$\frac{du}{db} = -2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2} dx.$$

En appliquant l'intégration par parties au second membre, on trouve qu'il est égal à $-\frac{2b}{a^2}u$; par conséquent

$$u = Ce^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

La constante se détermine par l'hypothèse $b = 0$, ce qui

donne

$$C = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2a} \quad \text{(formule B).}$$

499. On trouve par la différentiation

$$(1)\qquad \frac{du}{da} = 2n\int_0^\pi \frac{(\cos x - a)\sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+1}},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{da^2} &= 4n(n+1)\int_0^\pi \frac{(\cos x - a)^2 \sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+2}} \\ &\quad - 2n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+1}}. \end{aligned}\right.$$

L'intégration par parties donne en outre

$$\int_0^\pi \frac{\cos x \sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+1}} = \frac{2(n+1)a}{2n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n+2} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + x^2)^{n+2}},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{du}{da} &= \frac{4n(n+1)}{2n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n+2} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+2}} \\ &\quad - 2na\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\,dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Si l'on élimine la première intégrale du second membre entre cette dernière équation et l'équation (2), il viendra

$$\frac{d^2u}{da^2} + \frac{2n+1}{a}\frac{du}{da} = 0;$$

d'où

$$u = c + c'a^{-2n}.$$

a étant < 1, c' doit être nul, sans quoi l'intégrale devrait croître indéfiniment quand on fait tendre indéfiniment a vers zéro, ce qui ne peut avoir lieu. La valeur de c résulte

d'ailleurs de l'hypothèse $a = 0$ qui donne

$$u = \int_0^{\pi} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on suppose $a > 1$, on voit sans peine que l'intégrale s'obtient en multipliant l'expression précédente par a^{-2n}.

500. Posons généralement

$$A_p = \int_0^{m^{\frac{1}{n}}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^p dx.$$

Si l'on fait $\frac{x^n}{m} = u$, il vient

$$A_p = \frac{m^{\frac{1}{n}}}{n} \int_0^1 (1-u)^p\, u^{\frac{1}{n}-1}\, du,$$

et, en intégrant par parties,

$$A_p = p m^{\frac{1}{n}} \int_0^1 (1-u)^{p-1}\, u^{\frac{1}{n}} du.$$

D'ailleurs

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{n}} du = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{n}-1} \left(1 - \overline{1-u}\right) du;$$

d'où

$$(np+1)\int_0^1 (1-u)^p u^{\frac{1}{n}-1} du = np\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{n}-1} du,$$

et, par suite,

$$(np+1)A_p = np A_{p-1}.$$

Si $p = m$, on a la relation (1). En donnant à p toutes les valeurs entières depuis m jusqu'à 1, on trouve

$$A_m = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\cdots\frac{mn}{mn+1}\, m^{\frac{1}{n}}.$$

501. On sait que l'expression $\left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m$, toujours plus petite que e^{-x^n}, se rapproche autant qu'on veut de cette limite, quand on fait croître indéfiniment le nombre entier m. On peut conclure de là

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = \lim \int_0^{m^{\frac{1}{n}}} \left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m dx.$$

Pour établir cette relation en toute rigueur, considérons les trois intégrales

$$\int_0^h e^{-x^n}\,dx = A,$$

$$\int_0^h \left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m dx = B,$$

$$\int_0^{m^{\frac{1}{n}}} \left(1-\frac{x^n}{m}\right)^m dx = C,$$

où l'on suppose $h < m^{\frac{1}{n}}$, et, par suite,

$$C > B.$$

On peut toujours prendre m assez grand pour avoir $A = B + \alpha$, α désignant un nombre aussi près de zéro qu'on voudra. On peut également donner à h une assez grande valeur pour qu'on ait aussi

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = A + 6,$$

6 étant du même ordre de grandeur que α. Il suit de là que la différence positive $\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx - B$ est infiniment

petite pour m et h infiniment grands; il en est *à fortiori* de même pour la différence positive $\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx - \mathrm{C}$, ce qui démontre la relation (1).

Cette relation devient intuitive si l'on construit les courbes données par les équations

$$y = e^{-x^n}, \quad y = \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m.$$

En rapprochant de l'équation (1) la valeur trouvée pour A_m dans le numéro précédent, il vient

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = \lim\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots\frac{mn}{mn+1}\cdot m^{\frac{1}{n}}\right)_{m=\infty}.$$

Pour $n = 2$, on sait que le premier membre est égal à $\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}$. Quant au second, il se présente sous une forme peu commode pour le calcul; mais il est facile de le ramener à celle de la formule de Wallis, avec laquelle il présente de l'analogie. En posant

$$u = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m+1}\right) m^{\frac{1}{2}},$$

on a également

$$u = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\right)\frac{m^{\frac{1}{2}}}{2m+1},$$

d'où

$$u^2 = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right)\frac{m}{m+1},$$

et, par suite,

$$\lim u = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui s'accorde bien avec la formule de Wallis.

Le cas général peut se traiter d'une manière semblable. On a, en effet,

$$A_m = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots\frac{mn}{mn+1}\cdot m^{\frac{1}{n}},$$

$$A_m = \frac{n}{1}\cdot\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{3n}{2n+1}\cdots\frac{mn}{\overline{m-1}\,n+1}\cdot\frac{m^{\frac{1}{n}}}{mn+1},$$

$$A_m^{n-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1}\cdots\left(\frac{mn}{mn+1}\right)^{n-1}\cdot m^{\frac{n-1}{n}}.$$

On déduit de ces relations

$$A_m^n = \frac{n}{1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\left(\frac{2n}{n+1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1}\cdots$$
$$\times\left(\frac{mn}{\overline{m-1}\,n+1}\right)\left(\frac{mn}{mn+1}\right)^{n-1}\frac{m}{mn+1},$$

et, par suite,

$$\lim A_m = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\frac{n}{1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\frac{2n}{n+1}\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

C. Q. F. T.

§ XIII. — *Équations linéaires à coefficients constants.*

502. Par la méthode de la variation des constantes on trouve

$$y = Ce^{ax} - \frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} - \frac{4.3x^2}{a^3} - \frac{4.3.2x}{a^4} - \frac{4.3\;2.1}{a^5}.$$

On arriverait au même résultat en observant que le second membre étant une fonction entière du quatrième degré en x, si l'on pose

$$y_1 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

il sera facile de déterminer les coefficients A, B, etc., de

telle sorte que y_1 soit une intégrale particulière de l'équation proposée. Pour avoir l'intégrale générale, il suffira d'ajouter à y_1 l'intégrale générale de l'équation privée de second membre.

La méthode précédente peut toujours s'appliquer lorsque le second membre de l'équation est une fonction entière de x; elle convient encore quand il renferme linéairement des exponentielles, des sinus, des cosinus, dans lesquels x n'entre qu'au premier degré. Si, par exemple, le second membre contient e^{ax} ou $\sin ax$, on introduit dans l'expression de y_1 la quantité Ae^{ax} ou $A\sin ax + B\cos ax$, A et B étant deux indéterminées.

Le procédé que nous venons d'indiquer abrége souvent les calculs.

503. Conformément au numéro précédent, posons

$$y_1 = Ae^{mx}.$$

Pour que y_1 soit une intégrale particulière de l'équation proposée, il faut qu'on ait

$$A = \frac{1}{a+m};$$

l'intégrale demandée est donc

$$y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}.$$

Si $m = -a$, la valeur de y, qui peut s'écrire

$$y = C'e^{-ax} + \frac{e^{mx} - e^{-ax}}{a+m},$$

prend la forme $\frac{0}{0}$. La vraie valeur de cette expression est

$$C'e^{-ax} + xe^{-ax}.$$

504. $$y = Ce^{ax} + e^{mx}\frac{\{(m-a)\cos px + p\sin px\}}{(m-a)^2 + p^2}.$$

505. $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$.

A et B sont deux fonctions de x déterminées par les relations

$$A = -\int \frac{e^{2x}x\,dx}{(1+x)^2}, \quad B = \int \frac{e^{x}x\,dx}{(1+x)^2}.$$

On trouve

$$B = \frac{e^x}{1+x} + C, \quad A = -\frac{e^{2x}}{1+x} + \int \frac{e^{2x}dx}{1+x} + C';$$

et, par suite,

$$y = e^{-2x}\int \frac{e^{2x}dx}{1+x} + Ce^{-x} + C'e^{-2x}.$$

506. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + e^{2x}(C + C'x)$.

507. $y = \frac{(m^2 - n^2)\sin nx + 2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2} + e^{mx}(C + C'x)$.

Si l'on pose

$$\frac{m}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos\theta, \quad \frac{m}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin\theta,$$

y prend la forme plus simple

$$\frac{\sin(nx + 2\theta)}{m^2+n^2} + e^{mx}(C + C'x).$$

508. $y = \frac{\cos mx}{n^2 - m^2} + C\cos nx + C'\sin nx$.

Cette expression peut s'écrire

$$y = C'\sin nx + C''\cos nx - \frac{\cos mx - \cos nx}{m^2 - n^2},$$

et l'on voit que pour $m = n$ elle se réduit à

$$y = C'\sin nx + C''\cos nx + \frac{x\sin nx}{2n}.$$

509. $y = \dfrac{\sin mx}{m^4 - 5m^2 + 6} + C\cos\left(2^{\frac{1}{2}}x + \alpha\right) + C'\cos\left(3^{\frac{1}{2}}x + 6\right).$

510. $y = x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$
$- \ldots + C\cos x + C'\sin x.$

511. $y = -\dfrac{x^3}{a^4} + Ce^{ax} + C_1 e^{-ax} + C_2\cos(ax + C_3).$

512. $y = \dfrac{\cos x}{(a^2-1)^2} + (C + C_1 x)\cos ax + (C' + C'_1 x)\sin ax.$

513. Ou est conduit à résoudre une équation dont les racines sont $2, 2, -2, 3i, -3i$. Il en résulte

$$y = \frac{e^{mx}}{(m-2)^2(m+2)(m^2+9)} + e^{2x}(C + C_1 x) + C_2 e^{-2x}$$
$$+ C_3\cos(3x + C_4).$$

514. Les racines de l'équation à résoudre sont

$$-3, \quad 1 + 2i, \quad 1 - 2i.$$

Il en résulte

$$y = \frac{x^2}{15} + \frac{2x}{15^2} - \frac{28}{15^3} + e^x(C\sin 2x - C_1\cos 2x) + C_2 e^{-3x}.$$

§ XIV. — *Équations linéaires à coefficients variables.*

515. Cette équation étant linéaire et du premier ordre, on trouve, en appliquant la formule connue,

$$y = a + C(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

516. Cette équation est linéaire et du premier ordre. La formule ordinaire nous donne

$$y = \frac{a}{2(n+1)}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x\right] + \frac{a}{2(n-1)}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x\right]$$
$$+ C\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right]^n.$$

Si $n = 1$, les deux derniers termes peuvent s'écrire

$$\frac{a}{2}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x - \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right]^n}{n-1} + C'\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right]^n.$$

La vraie valeur de la première de ces expressions, obtenue par la méthode connue, est

$$-\frac{a}{2}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right]\log\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right].$$

On trouverait d'une manière semblable la formule relative au cas de $n = -1$.

517. $$y = \frac{1}{a+4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{a}{2}}.$$

Si $a = -4$, on peut écrire

$$y = \frac{1}{a+4}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{a}{2}}\right] + C'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{a}{2}}.$$

La vraie valeur du terme renfermé dans la grande parenthèse est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

518. $$y = -\frac{\left[nx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 - 2x^2\right]}{n^2+4} + Ce^{n \operatorname{arc} \sin x}.$$

519. Cette équation est de la forme

$$(a+bx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 (a+bx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = x;$$

elle pourra donc s'intégrer en posant

$$x = e^t.$$

On trouve, en effet,

$$y = \frac{x^m}{m^2-1} + Cx + \frac{C_1}{x}.$$

Si $m=1$,

$$y=\frac{x\log x}{2}+Cx+\frac{C_1}{x}.$$

520. Même observation qu'au n° 519. En posant

$$x=e^t,$$

il vient

$$y=\log\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}(C+C_1\log x).$$

521. Remarque du n° 519. En posant

$$1+x=e^t,$$

l'équation à intégrer est

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-8y=e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}.$$

Si l'on opère comme il est indiqué au n° 502, on trouve facilement

$$y=\frac{8}{85}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{8}{51}(1+x)^{\frac{1}{2}}+C(1+x)^2$$
$$+C_1\cos[\log(1+x)^2]+C_2\sin[\log(1+x)^2].$$

522. Remarque du n° 519. On est conduit à intégrer l'équation

$$\frac{d^3y}{dt^3}-6\frac{d^2y}{dt^2}+12\frac{dy}{dt}-8y=\varphi(e^t).$$

On parvient facilement au résultat en suivant la marche indiquée au n° 502.

L'intégrale peut se mettre sous la forme

$$y=x^2\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\frac{\varphi(x)}{x^2}+x^2[C+C_1\log x+C_2(\log x)^2].$$

(Moigno, *Leçons de Cal. diff.*, t. II, p. 590.)

523. On remarque que l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - a^2(xy) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y = \frac{1}{x}(Ce^{ax} + C_1 e^{-ax}).$$

524. L'équation peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}\right) + n^2 y = 0.$$

Posons

(1) $$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = z,$$

ce qui donne

(2) $$y = -\frac{1}{n^2}\frac{dz}{dx};$$

par suite,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} + n^2 z = 0.$$

Cette équation, traitée comme celle du n° 523, a pour intégrale

$$zx = A\cos(nx + \alpha),$$

A et α étant deux constantes arbitraires. En différentiant et tenant compte des relations (1) et (2), il vient

$$y = \frac{A\cos(nx+\alpha)}{n^2 x^2} + \frac{A\sin(nx+\alpha)}{nx}.$$

525. L'équation peut s'écrire

$$\frac{x^2 d\frac{dy}{dx}}{dx} - \frac{c^2 y}{x^2} = 0.$$

Posons

$$x = u^{-1},$$

elle devient

$$\frac{d\left(u^2 \frac{dy}{du}\right)}{du} - c^2 u^2 y = 0.$$

Développant et supprimant u facteur commun, on trouve

$$2\frac{dy}{du} + u\frac{d^2y}{du^2} - c^2 u y = 0,$$

ou bien

$$\frac{d^2(uy)}{dx^2} - c^2 uy = 0;$$

par suite,

$$y = x\left(\mathrm{A}e^{\frac{c}{x}} + \mathrm{B}e^{-\frac{c}{x}}\right).$$

L'équation proposée s'intègre encore comme il suit :

Désignons par $\sum a_n x^n$ une série dont le terme général est $a_n x^n$, n pouvant recevoir des valeurs entières positives ou négatives, et faisons $y = \sum x_n a^n$. Cette valeur, substituée dans l'équation différentielle, nous donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{c^2 y}{x^4} = \sum\left[n(n-1)a_n x^{n-2}\right] - c^2 \sum a_{n+2} x^{n-2} = 0.$$

En égalant à zéro le multiplicateur de x^{n-2}, il vient

$$n(n-1)a_n = c^2 a_{n+2}.$$

Il résulte de cette relation qu'on ne peut attribuer à n que des valeurs négatives. Faisant donc successivement n égal à -1, -2, etc., on trouve

$$y = a_1\left(x + \frac{1}{1.2}\frac{c^2}{x} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{c^4}{x^3} + \ldots\right)$$
$$+ a_0\left(1 + \frac{1}{1.2.3}\frac{c^2}{x^2} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{c^4}{x^4} + \ldots\right),$$

a_0 et a_1 désignant deux constantes arbitraires. Or on a, en général,

$$1+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots$$
$$+z+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\ldots=e^z.$$

On peut donc écrire

$$y=x\left(\mathrm{A}e^{\frac{c}{x}}+\mathrm{B}e^{-\frac{c}{x}}\right),$$

en posant

$$2\mathrm{A}=a_1+\frac{a_0}{c},\quad 2\mathrm{B}=a_1-\frac{a_0}{c}.$$

526. En opérant comme au numéro précédent, on trouve

$$y=x\left(\mathrm{A}\cos\frac{c}{x}+\mathrm{B}\sin\frac{c}{x}\right).$$

527. Au moyen des séries (n° 525), on a

$$y=\mathrm{A}\left(1-3cx^{\frac{1}{3}}\right)e^{3cx^{\frac{1}{3}}}+\mathrm{B}\left(1+3cx^{\frac{1}{3}}\right)e^{-3cx^{\frac{1}{3}}}.$$

528. $$y=\mathrm{A}\left(3-15cx^{\frac{1}{5}}+25c^2x^{\frac{2}{5}}\right)e^{5cx^{\frac{1}{5}}}$$
$$+\mathrm{B}\left(3+15cx^{\frac{1}{3}}+25c^2x^{\frac{2}{5}}\right)e^{-5cx^{\frac{1}{5}}}.$$

Les équations des quatre derniers numéros sont des cas particuliers de celle de Riccati (n° 540).

§ XV. — *Équations différentielles non linéaires.*

529. Cette équation est de la forme

$$dy+\mathrm{P}y\,dx=\mathrm{Q}y^{n+1}\,dx,$$

qui devient linéaire en posant

$$u=\frac{1}{y^n}.$$

On trouve ici

$$y^{\frac{1}{2}} = -\frac{1-x^2}{3} + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}.$$

530. $y^2 = -\frac{c}{b}x - \frac{ac}{2b^2} + Ce^{\frac{2b}{a}x}$. (N° 529.)

531. $y^3 = \frac{3a^3}{2x} + \frac{C}{x^3}$. (N° 382.)

532. $y^2 = e^{-\frac{2a}{x}} - \frac{b}{ax} + \frac{b}{2a^2}$. (N° 529.)

533. En posant

$$x = \frac{1}{v},$$

l'équation devient linéaire eu égard à v et a pour intégrale

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

534. L'équation étant homogène, si l'on pose

$$\frac{y}{x} = z,$$

elle donne

$$\log x + \frac{1}{2}\log(1 - mz + z^2) + \frac{m}{2}\int\frac{dz}{1 - mz + z^2} = C.$$

Pour $m > 2$, le dénominateur de la quantité sous le signe est de la forme

$$(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right),$$

et, par suite,

$$\int\frac{m\,dz}{1-mz+z^2} = \frac{a^2+1}{a^2-1}\log\left(\frac{z-a}{z-\frac{1}{a}}\right);$$

par conséquent,

$$\log (x^2+y^2-mxy)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2+1}{2(a^2-1)} \log \frac{y-ax}{ay-x} = \text{C}.$$

Pour $m < 2$ on trouve, en posant $m = 2\cos\alpha$,

$$\log (x^2+y^2-mxy)^{\frac{1}{2}} + \cot\alpha \,\text{arc tang} \frac{y - x\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{C}.$$

Si enfin $m = 2$,

$$x - y = \text{C}e^{-\frac{x}{x-y}}.$$

On aurait pu intégrer l'équation en passant aux coordonnées polaires, ce qui donne

$$\frac{dr}{r} = \frac{m\sin^2\theta\, d\theta}{m\sin\theta\cos\theta - 1} = -\frac{m}{2}\frac{\cos 2\theta\, d.2\theta}{m\sin 2\theta - 2} + \frac{m}{2}\frac{d.2\theta}{m\sin 2\theta - 2}.$$

Pour l'intégration du dernier terme, voir le n° 348.

535. Cette équation est homogène et a pour intégrale

$$y^2 + 2x^2 = \text{C}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

536. Équation homogène.

$$(x+y)\log\frac{x}{\text{C}} = xe^{\frac{y}{x}}.$$

537. L'équation transformée est

$$x(1-z^2)\,dz = 0,$$

qui a pour solutions

$$x = 0, \quad y^2 - x^2 = 0, \quad \frac{y}{x} = \text{C}.$$

On pouvait le voir immédiatement en mettant l'équation proposée sous la forme

$$(x\,dy - y\,dx)(y^2 - x^2) = 0.$$

538. Si l'on fait

$$\frac{y}{x} = u,$$

il vient

$$dx = -x\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\psi(u)} + \frac{ax^{m+2}du}{\varphi(u) + u\psi(u)};$$

et cette équation a pour intégrale

$$\frac{1}{x^{m+1}} = e^{v}\left[C - a(m+1)\int e^{-v}\frac{du}{\varphi(u) + u\psi(u)}\right],$$

où

$$v = (m+1)\int\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\psi(u)}.$$

539. Dans le cas particulier où l'on a

$$a = b = c = 0,$$

l'équation se réduit à

$$(1)\ (a_1x + a_2y)(xdy - ydx) = (b_1x + b_2y)dy - (c_1x + c_2y)dx,$$

et rentre dans celle du numéro précédent.

Pour voir s'il est possible de ramener l'équation donnée à la forme (1), changeons de variables et posons

$$x = \alpha + u, \quad y = \beta + v,$$

α et β étant deux constantes qu'il s'agit de déterminer de manière à obtenir la réduction qu'on a en vue. On est conduit de la sorte à satisfaire aux deux équations

$$\begin{cases} \alpha(a + a_1\alpha + a_2\beta) - (b + b_1\alpha + b_2\beta) = 0, \\ \beta(a + a_1\alpha + a_2\beta) - (c + c_1\alpha + c_2\beta) = 0. \end{cases}$$

On peut les écrire

$$\frac{b + b_1\alpha + b_2\beta}{\alpha} = \frac{c + c_1\alpha + c_2\beta}{\beta} = a + a_1\alpha + a_2\beta;$$

et si l'on pose chacun de ces rapports égal à λ, il en résulte le système

$$\begin{cases} (a-\lambda)+a_1\alpha+a_2\beta=0, \\ b+(b_1-\lambda)\alpha+b_2\beta=0, \\ c+c_1\alpha+(c_2-\lambda)\beta=0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, pour déterminer λ, et par suite α et β, l'équation du troisième degré

$$(a-\lambda)(b_1-\lambda)(c_2-\lambda)-b_2c_1(a-\lambda)-a_2c(b_1-\lambda) \\ -a_1b(c_2-\lambda)+a_1b_2c-a_2bc_1=0.$$

La réduction à la forme (1) est donc toujours possible, et l'équation proposée peut toujours s'intégrer.

L'intégration de cette équation a été donnée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXXIV), en adoptant une marche très-différente de celle qu'on vient de suivre et qui est due à M. G. Boole.

540. Cette équation rentre dans celle de Riccati, dont la forme générale est

$$dy+b^2y^2dx=a^2x^mdx,$$

et qu'on sait intégrer toutes les fois qu'on a

$$m=-\frac{4r}{2r\pm1},$$

r étant un nombre entier. Dans l'équation proposée,

$$m=-\frac{4}{3};$$

on trouve alors

$$\frac{y\left(x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}{y\left(x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}=Ce^{6x^{\frac{1}{3}}}.$$

541. $$\frac{x^{\frac{2}{3}}+yx^{\frac{5}{3}}-6}{3.2^{\frac{1}{2}}(1+xy)x^{\frac{1}{3}}}+\operatorname{tang}\left(\frac{3.2^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+C\right)=0.$$ (N° 540.)

542. Cette équation peut s'écrire

$$a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + x^m y^n \left(c\frac{dx}{x} + e\frac{dy}{y}\right) = 0.$$

Posons

$$x^a y^b = u, \quad x^c y^e = v,$$

elle devient

$$\frac{du}{u} + u^\alpha v^\beta \frac{dv}{v} = 0,$$

en faisant

$$\alpha = \frac{me - nc}{ae - bc}, \qquad \beta = \frac{na - mb}{ae - bc}.$$

On trouve alors

$$\frac{v^\beta}{\beta} - \frac{u^{-\alpha}}{\alpha} = C.$$

Si $me = nc$, $na = mb$, on a

$$x^{a+c} y^{b+e} = C.$$

Si $ae - bc = 0$ sans que les numérateurs de α et de β soient nuls, l'équation proposée revient à

$$\left(a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y}\right)\left(1 + \frac{c}{a}x^m y^n\right) = 0,$$

et elle est satisfaite par

$$x^a y^b = C, \quad \text{et par} \quad x^m y^n = -\frac{a}{c} = -\frac{b}{e}.$$

543. On voit sans peine que si x et y représentaient deux tangentes les radicaux disparaîtraient; posons donc

$$y = \operatorname{tang} v, \quad x = \operatorname{tang} u;$$

l'équation devient

$$\sin(v - u)\, dv = n\, du.$$

Faisant

$$v - u = z,$$

on trouve

$$dv = \frac{ndz}{\sin z - n},$$

équation qui s'intègre au moyen du n° 348.

On obtient alors x et y en fonction de l'auxiliaire z.

544. L'équation proposée revient à celle-ci :

$$\left(\frac{dy}{dx} - x^2\right)\left(\frac{dy}{dx} - xy\right)\left(\frac{dy}{dx} - y^2\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0.$$

545. $\left[(a^2 - x^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 1\right]\left(\frac{dy}{dx} + bx\right) = 0;$

$$(y - C)^2 = \frac{bx^2}{2}\left(\text{arc sin}\frac{x}{a}\right)^2.$$

546. $\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}\left(x^2 + y^2\right)^2\frac{dy^2}{dx^2},$

d'où

$$\frac{xdy}{dx} - y = \pm y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx},$$

et enfin

$$y = x \tang\left(C \pm \frac{y^2}{2}\right).$$

547. Posons

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{y}{x} = u;$$

il vient

$$u = p + n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$dy = p\,dx = u\,dx + x\,du,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = -\frac{dp}{n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{p\,dp}{1 + p^2};$$

et en désignant une constante arbitraire par $\log a$,

$$x = \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\left[(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - p\right]^{\frac{1}{n}}.$$

On en déduit

$$y = \frac{a\left[p + n(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\left[(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - p\right]^{\frac{1}{n}},$$

et par suite, en tenant compte de la valeur de $\frac{y}{x}$,

$$\frac{[y^2 + (1-n^2)x^2]^{\frac{1}{2}} - ny}{1-n^2} = a\left[\frac{[y^2+(1-n^2)x^2]^{\frac{1}{2}} - y}{(1-n)x}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

548. Cette équation est homogène en x et en y, comme celle du numéro précédent, et peut se traiter de la même manière; mais il est plus simple de la résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$y\frac{dy}{dx} + \frac{n^2x}{n^2-1} = \pm\frac{[(n^2-1)y^2 + n^2x^2]^{\frac{1}{2}}}{n^2-1},$$

ou bien

$$\frac{(n^2-1)y\,dy + n^2x\,dx}{[(n^2-1)y^2+n^2x^2]^{\frac{1}{2}}} = \pm 1,$$

qui a pour intégrale

$$(n^2-1)y^2 + n^2x^2 = (C \pm x)^2.$$

549. En posant

$$dy = p\,dx,$$

l'intégrale résulte de l'élimination de p entre les deux équations

$$y = (1+p)x + p^2,$$
$$x = 2(1-p) + Ce^{-p}.$$

550. L'équation peut s'écrire

$$y - 2px = a(1+p^2)^{\frac{1}{2}},$$

et son intégrale s'obtient en éliminant $p = \frac{dy}{dx}$ entre cette équation et la suivante :

$$p^2 x = -\frac{a}{2}\left\{ p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} + C.$$

551. Cette équation revient à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy},$$

équation homogène dont l'intégrale est

$$y^2 + x^2 = 2Cx.$$

552. L'équation peut s'écrire

$$\frac{y''}{y'} + f(x) + \varphi(y)\,dy = 0$$

ou

$$\frac{dy'}{y'} + f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0.$$

On a donc

$$y' = ce^{\int f(x)dx} e^{\int \varphi(y)\,dy},$$

et par conséquent,

$$e^{-\int \varphi(y)dy} dy = Ce^{\int f(x)dx} dx.$$

On tire de là

$$\int e^{-\int \varphi(y)dy} dy = C_1 + Ce^{\int f(x)dx}.$$

553. Lorsqu'une équation différentielle est homogène par rapport aux quantités x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, etc., on peut toujours en abaisser l'ordre d'une unité en posant

$$x = e^t, \quad y = ue^t.$$

Ces hypothèses conduisent ici à la relation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \frac{du^2}{dt^2}.$$

Faisant

$$\frac{du}{dt} = z,$$

il vient successivement

$$z = \frac{1}{1 - cx}, \quad u = \frac{c'x}{1 - cx},$$

$$y = x \log \frac{c'x}{1 - cx}.$$

554. Même observation qu'au numéro précédent. On trouve

$$\frac{\left[(c-1)x^{\frac{1}{2}} + \left(2y + \overline{c^2 - 1}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1-c}}{\left[(c+1)x^{\frac{1}{2}} - \left(2y + \overline{c^2 - 1}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1+c}} = c'.$$

555. L'équation est homogène par rapport à

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

et s'intègre alors en posant

$$\frac{dy}{dx} = uy.$$

On déduit en effet de là

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et cette équation a pour intégrale

$$u = \mathrm{C}\left[x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right];$$

d'où

$$\log(\mathrm{C}'y) = \mathrm{C}a^2\log\left[x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \mathrm{C}x\left[x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

556. En opérant comme au numéro précédent, on trouve

$$y^{\mathrm{C}n}e^{\mathrm{C}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{C}'\left[1 + \mathrm{C}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

557. L'équation peut s'écrire

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x\,dx}{a^2};$$

d'où

$$\frac{p}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{a^2} + \mathrm{C} = \frac{x^2 + ab}{a^2}.$$

D'ailleurs,

$$y = \int p\,dx = \int \frac{(x^2 + ab)\,dx}{[a^4 - (x^2 + ab)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est l'équation de la courbe élastique (n° 603).

558. L'équation peut s'écrire

$$(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}dx + x\frac{p\,dp}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} = a\,dp = d\left[x(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

On tire p de là, et l'on trouve ensuite

$$y = (a^2 + b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - b\log\frac{b + (a^2 + b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{c(x - a)},$$

b et c étant deux constantes arbitraires.

559. $dp + (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}p\,dx = \frac{x^2}{a^2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$

Cette équation linéaire du premier ordre s'intègre par la formule connue et conduit à l'intégrale suivante :

$$a^2y = -\frac{x^3}{9} - \frac{2a^2x}{3} + \frac{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{9} - Cx^2$$
$$+ Cx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + Ca^2 \log \frac{x + (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{C'}.$$

560. On arrive à une équation linéaire en posant

$$\frac{1}{p} = v,$$

ce qui conduit à l'intégrale générale

$$y + C' = \log(x^2 - C^2) - \frac{a}{C} \log \frac{x+C}{x-C}.$$

561. On pose

$$y^2 + p^2 = z^2,$$

et on arrive à une équation qui devient facilement linéaire et du premier ordre. On en déduit

$$x = C' + \left(\frac{2y - C}{C}\right)^{\frac{1}{2}} + \arccos \frac{y - C}{y}.$$

562. Cette équation peut s'écrire

$$p - y\frac{dp}{dy} = n\left(1 + a^2\frac{dp^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

c'est la forme de l'équation de Clairaut. On trouve pour l'intégrale

$$Cx + C' = \log\left[Cy + n(1 + a^2C^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Il y a une solution singulière

$$y = na \sin \frac{C + x}{a}.$$

§ XVI. — *Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.*

563. $(x+y)^2 - 4ay = 0.$

564. $y^2 = 1 + x^2.$

C'est à propos de cet exemple que Taylor (1715) a remarqué, le premier, qu'une équation différentielle peut avoir des solutions non comprises dans l'intégrale générale.

565. $x^2 + y^2 - a^2 = 0.$

566. La méthode conduit à l'équation

$$y^2 - 4x = 0;$$

mais cette solution ne satisfait pas à la proposée.

567. On trouve

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et, par suite,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

On obtient l'équation proposée quand on cherche une courbe telle, que la portion de la tangente comprise entre les axes coordonnés ait une longueur constante. La solution générale donne toutes les tangentes à cette courbe (n° 228).

568. On arrive à l'équation

$$ax + by - x^2 = 0,$$

qui n'est pas une solution singulière, puisqu'elle ne satisfait pas à la proposée.

569. $y^2 - 4x^3 = 0$.

570. Pour qu'une intégrale d'une équation différentielle du premier ordre

$$F(x, y, p) = 0$$

soit une solution singulière, il faut et il suffit que la valeur de p qu'on en tire annule $\frac{dF}{dp}$ sans annuler $\frac{dF}{dy}$. En appliquant ici ce caractère, on trouve que

$$y^2 = 2x + 1$$

est une intégrale particulière de l'équation proposée, et que

$$y^2 + x^2 = 0$$

en est une solution singulière. On obtient d'ailleurs facilement, pour l'intégrale générale,

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

571. C'est une intégrale particulière. En différentiant la proposée, on arrive à exprimer son intégrale générale par le système de deux équations.

§ XVII. — *Équations différentielles simultanées.*

572. En éliminant y, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 14x = 1 + 5t - 3e^t;$$

et, par suite,

$$x = -\frac{31}{196} + \frac{5}{14}t - \frac{1}{8}e^t + C_1e^{-7t} + C_2e^{-2t},$$

$$y = \frac{9}{98} - \frac{1}{7}t + \frac{5}{24}e^t + C_1e^{-7t} - \frac{2}{3}C_2e^{-2t}.$$

573. $x = \frac{4}{25} e^t - \frac{1}{36} e^{2t} + (C_1 t + C) e^{-t},$

$$y = \frac{1}{25} e^t + \frac{7}{36} e^{2t} - (C_1 t + C_1 + C) e^{-t}.$$

574. On trouve, en éliminant y et z,

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - (a'b + a''c + b''c')\frac{dx}{dt} + (a'b''c + a''bc')x = 0,$$

dont l'intégrale est

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} + C_3 e^{\gamma t},$$

α, β, γ étant les racines de l'équation

$$u^3 - (a'b + a''c + b''c')u + a'b''c + a''bc' = 0.$$

Connaissant x, on trouve facilement y et z exprimées en fonction des mêmes constantes arbitraires.

575. $x = \frac{ac' - ca'}{ba' - ab'} + C_1 \cos(ht + \alpha) + C_2 \cos(kt + \beta),$

$$y = \frac{cb' - bc'}{ba' - ab'} - \frac{h^2 + b}{a} C_1 \cos(ht + \alpha) - \frac{k^2 + b}{a} C_2 \cos(kt + \beta).$$

h^2 et k^2 sont les racines de l'équation

$$u^2 - (a' + b)u + ba' - ab' = 0,$$

et C_1, C_2, α, β désignent des constantes arbitraires.

576. $x = \cos 2t - 2\sin 2t + \cos t + C_1 \cos\left(2^{\frac{1}{2}} t + \alpha\right) + C_2 \cos\left(3^{\frac{1}{2}} t + \beta\right).$

La valeur de y se déduit facilement de celle de x.

577. On obtient une équation qui ne renferme plus de

termes indépendants des dérivées, en éliminant m entre les deux équations du système. On trouve ainsi

$$r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin\theta\frac{d^2r}{dt^2}=0.$$

Or le premier membre de cette équation est la dérivée seconde de $r\sin\theta$ par rapport à t; donc

$$(3) \qquad r\sin\theta = at+b,$$

a et b désignant des constantes arbitraires. D'un autre côté, si l'on multiplie l'équation (1) par $\sin\theta$, l'équation (2) par $\cos\theta$ et qu'on retranche le premier résultat du second, il vient

$$\cos\theta\frac{d^2r}{dt^2}-r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-m=0,$$

équation qui se ramène à

$$\frac{d^2(r\cos\theta)}{dt^2}=m;$$

par suite,

$$(4) \qquad r\cos\theta=\frac{mt^2}{2}+Ct+C'.$$

Les relations (3) et (4) donnent la solution du problème.

578. Multiplions la première équation par x, la deuxième par y, la dernière par z, et posons

$$\varphi=\int_0^t xyz\,dt;$$

il vient

$$x^2=\frac{2(b-c)}{a}\varphi+\alpha,$$

$$y^2=\frac{2(c-a)}{b}\varphi+6,$$

$$z^2=\frac{2(a-b)}{c}\varphi+\gamma,$$

α, 6, γ étant trois constantes arbitraires. On déduit de là

$$xyz = \frac{d\varphi}{dt} = \left\{ \left[\frac{2(b-c)}{a}\varphi + \alpha \right] \left[\frac{2(c-a)}{b}\varphi + 6 \right] \left[\frac{2(a-b)}{c}\varphi + \gamma \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Cette équation ne peut s'intégrer généralement qu'au moyen des fonctions elliptiques. φ étant exprimé en fonction de t, on aura aussi y et z en fonction de la même variable.

Les équations proposées se rencontrent dans le problème du mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, et qui n'est sollicité par aucune force.

579. Les équations données reviennent aux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{z}{r}.$$

On en tire

$$x\,dy - y\,dx = C_1\,dt, \quad y\,dz - z\,dy = C_2\,dt, \quad z\,dx - x\,dz = C_3\,dt.$$

Si l'on ajoute membre à membre les carrés de ces équations, le résultat peut s'écrire

$$(2) \quad (x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = A^2dt^2,$$

A^2 représentant la somme $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$.

D'ailleurs, en multipliant les équations (1) respectivement par $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$ et ajoutant, il vient, $2B$ désignant une constante arbitraire,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2(R + B)\,dt^2,$$

ce qui permet de mettre l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = [2r^2(R + B) - A^2]dt^2 = r^2dr^2.$$

On tire de là

$$(4) \qquad dt = [2r^2(R + B) - A^2]^{-\frac{1}{2}}\,r\,dr;$$

et, en différentiant,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dR}{dr} + \frac{A^2}{r^3}.$$

Ce résultat nous permet de déduire de la première des équations une relation qui ne renferme plus R ; on trouve ainsi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{x}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{A^2}{r^3}\frac{x}{r} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left[r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)\right] + \frac{A^2}{r^2}\frac{x}{r} = 0.$$

Changeons de variable indépendante et posons

(5) $$\frac{r^2}{dt} = \frac{A}{d\varphi};$$

la relation précédente devient

$$\frac{d^2\left(\frac{x}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{x}{r} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{x}{r} = g_1 \cos\varphi + h_1 \sin\varphi.$$

On aurait de même

$$\frac{y}{r} = g_2 \cos\varphi + h_2 \sin\varphi,$$

$$\frac{z}{r} = g_3 \cos\varphi + h_3 \sin\varphi.$$

D'ailleurs les équations (4) et (5) nous donnent

$$t + \alpha = \int [2r^2(R+B) - A^2]^{-\frac{1}{2}} r\,dr,$$

$$\varphi + \beta = \int A r^{-1} [2r^2(R+B) - A^2]^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Les constantes arbitraires A, B, α, 6, g_1, h_1, etc., ne sont pas toutes indépendantes. En effet, si l'on élève au carré les valeurs de x, y, z, on trouve

$$1 = \cos^2\varphi(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) + \sin^2\varphi(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 2\sin\varphi\cos\varphi(g_1h_1 + g_2h_2 + g_3h_3).$$

Cette relation ayant lieu pour toutes les valeurs de φ, on en conclut

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1,$$
$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1,$$
$$g_1h_1 + g_2h_2 + g_3h_3 = 0;$$

de plus, 6 modifiant seulement les constantes g_1, h_1, etc., on peut le supposer nul, et il reste en définitive six constantes distinctes.

Observons aussi que les intégrales qui déterminent t et φ ne sont pas indépendantes. Si l'on pose, en effet,

$$S = \int \frac{dr}{r}\left[2r^2(R + B) - A^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$t + \alpha = \frac{dS}{dB}, \quad \varphi + 6 = -\frac{dS}{dA}.$$

Si $R = \frac{\mu}{r}$, μ désignant une constante, le calcul précédent donne la loi du mouvement d'un point matériel attiré par une force centrale qui varie en raison inverse du carré de la distance.

Ce calcul, dû à M. Binet, a été appliqué par lui au cas d'un nombre quelconque d'équations.

(*Journal de Liouville*, t. II.)

§ XVIII. — *Équations aux différentielles partielles linéaires et du premier ordre.*

580. Il faut intégrer les deux équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{y\,dz}{x^2}.$$

On trouve

$$y = \frac{C}{x}, \quad z = \frac{x^3}{3C} + C' = \frac{x^2}{3y} + C';$$

d'où, en désignant par φ une fonction arbitraire,

$$z = \frac{x^2}{3y} + \varphi(xy).$$

581. Les équations à intégrer sont

$$dx = -dy = \frac{x+y}{z}\,dz;$$

la première donne

$$y + x = C,$$

et, par suite,

$$z = C' e^{\frac{x}{C}} = e^{\frac{x}{x+y}} \varphi(x+y).$$

582. On a

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z};$$

d'où

$$y^2 - x^2 = C, \quad \frac{z}{x+y} = C',$$

$$z = (x+y)\varphi(y^2 - x^2).$$

583. $x\,dx = y\,dy = y^2 \dfrac{dz}{z}$;

d'où

$$y^2 - x^2 = C, \quad z = C'y,$$

$$z = y\varphi(y^2 - x^2).$$

584. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{xy}$;

$$y = Cx, \quad z^2 = Cx^2 + C',$$

$$z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

585. $-\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{y^3} = \frac{dz}{axz}$;

$$xy = C, \quad z = C' e^{-\frac{aC}{3y^3}} = e^{-\frac{ax}{3y^2}} \varphi(xy).$$

586. $\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{a} = \frac{dz}{e^{mx} \cos py}$;

on tire de là

$$y + ax = C,$$

$$z = e^{mx} \frac{m \cos p(C - ax) - ap \sin p(C - ax)}{m^2 + a^2p^2} + C'$$

$$= e^{mx} \frac{m \cos py - ap \sin py}{m^2 + a^2p^2} + C',$$

et, par suite,

$$z = e^{mx} \frac{m \cos py - ap \sin py}{m^2 + a^2p^2} + \varphi(y + ax).$$

587. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{du}{xyz}$;

d'où

$$u = \frac{x^2}{2} yz - \frac{x^3}{6}(bz + cy) + bc\frac{x^4}{12} + \varphi(y - bx, z - cx).$$

588. $\frac{dx}{y + x} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{z}$.

La première équation peut s'écrire

$$x\,dy - y\,dx + x\,dx + y\,dy = 0,$$

qui s'intègre immédiatement au moyen des coordonnées

polaires, et donne

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{y} - \log(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{C}.$$

On a aussi

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},$$

d'où

$$z = \text{C}'(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}};$$

et, par suite,

$$z = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\varphi\left[\text{arc tang}\,\frac{x}{y} - \log(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

589. $\cos x\,dx = \dfrac{dy}{a} = \dfrac{\sin y\,dz}{z\cos y}$;

$$z = (\sin y)^{\frac{1}{a}}\varphi(y - a\sin x).$$

590. $\dfrac{dx}{y-bz} = \dfrac{dy}{az-x} = \dfrac{dz}{bx-ay}$;

multiplions les deux termes du premier rapport par a, ceux du second par b; chacun de ces rapports sera égal à

$$\frac{a\,dx + b\,dy + dz}{0},$$

ce qui exige qu'on ait

$$ax + by + z = \text{C}.$$

On trouve semblablement

$$x^2+y^2+z^2 = \text{C}';$$

d'où

$$x^2+y^2+z^2 = \varphi(ax+by+z)$$

591. $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{y\,dz}{x^3}$;

$$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \varphi\left(\frac{y - x}{xy}\right).$$

592. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{2xy\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$;

$$z = a \sin\left[xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

593. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{dz}{xy}$.

Soit fait

$$\frac{dx}{x} = du, \quad \frac{dy}{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = dv;$$

d'où

$$x = e^u,$$

$$(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} + y = e^v, \quad (1 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y = e^{-v},$$

$$2y = e^v - e^{-v}.$$

Il en résulte

$$z = \frac{e^{u+v}}{4} - \frac{ue^{u-v}}{2} + \varphi(v - u);$$

et, par suite,

$$z = \frac{x}{4}\left[(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} + y\right]$$
$$- \frac{x}{2}\left[(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y\right]\log x + \varphi\left[\frac{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} + y}{x}\right].$$

594. $u = \dfrac{xy}{(1 - a)z} + z^a \varphi\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$.

595. $$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{z+u+x} = \frac{dz}{u+x+y} = \frac{du}{x+y+z}.$$

Ajoutons terme à terme ces rapports égaux, il vient

$$\frac{d(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)} = \frac{dx}{y+z+u} = \frac{dv}{3v},$$

en posant

$$x+y+z+u=v.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\frac{dy-dz}{z-y} = -\frac{d(y-z)}{y-z} = \frac{dv}{3v};$$

d'où résulte

$$v(y-z)^3 = C.$$

On trouve encore, à cause de la symétrie,

$$v(z-u)^3 = C', \quad v(u-x)^3 = C'';$$

l'équation intégrale est donc

$$\varphi[v(y-z)^3, \quad v(z-u)^3, \quad v(u-x)^3] = 0.$$

§ XIX. — *Calcul des variations.*

Formules générales :

$$V = F(x, y, p, q, \ldots), \quad dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots,$$

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx},$$

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V\,dx = A_{x_1} - A_{x_0} + \int_{x_0}^{x_1} B\omega\,dx.$$

A_{x_1} représente ce que devient la fonction A quand on y remplace les lettres qui y entrent par les valeurs qu'elles

prennent à la limite $x = x_1$; A_{x_0} a une signification analogue. D'ailleurs,

$$A = \delta x\left[V - p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right) - q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) - \ldots\right]$$
$$+ \delta y\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$\delta p\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) + \ldots,$$
$$B = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots.$$

(1) $A_{x_1} - A_{x_0} = 0$, équation aux limites;

(2) $B = 0$, équation indéfinie.

Si V renfermait $x_0, x_1, y_0, y_1, p_0, p_1, \ldots$ valeurs de $x, y, p, \ldots$, relatives aux limites, on ajouterait au premier membre de l'équation (1) la quantité

$$\delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0} dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0} dx + \ldots$$
$$+ \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_1} dx + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_1} dx + \ldots$$

Lorsque la fonction V ne contient pas de dérivée d'ordre supérieur au second et qu'on suppose en outre $M = 0$, l'équation (2) se remplace par celle-ci :

$$V = Pp + Qq - p\frac{dQ}{dx} + C;$$

et si l'on a à la fois

$$M = 0, \quad N = 0,$$

elle se remplace par la suivante :

$$V = Qq + Cp + C'.$$

Lorsque V renferme plusieurs fonctions de x, chacune d'elles donne lieu à une équation de la forme (2), à moins toutefois qu'elles ne satisfassent à une ou plusieurs équations données.

596. On trouve

$$x + 2a(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation à laquelle on peut arriver sans employer la méthode des variations. En faisant tourner la courbe obtenue autour de l'axe des x, la surface de révolution qui en résulte renferme un volume qui, parmi tous ceux de même masse, exerce l'attraction maximum sur un point de l'axe. L'attraction est supposée proportionnelle aux masses et en raison inverse du carré de la distance.

597. L'élément de la surface en question est

$$\frac{1}{2}\rho\, ds,$$

ρ désignant le rayon de courbure; on a donc

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\rho\, ds = \delta\int_{x_0}^{x_1}\frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx.$$

Comme x et y n'entrent pas explicitement sous le signe, on trouve, d'après les formules générales,

$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = Cp + C' - n\frac{(1+p^2)^2}{q},$$

ou bien

$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = Cp + C';$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\rho = \frac{Cp + C'}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{C\,dy + C'\,dx}{ds}.$$

Par un changement d'axes convenable on obtiendra

$$\rho = -2a\frac{dy}{ds},$$

ou bien

$$dx = -a\frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2},$$

dont l'intégrale est

$$x - b = \frac{a}{1+p^2}.$$

On déduit de cette dernière

$$dy = dx\left(\frac{a}{x-b} - 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

équation différentielle d'une cycloïde.

Les quatre constantes qu'introduit l'intégration complète sont déterminées par les conditions de la question. Dans le cas où l'on donne les points extrêmes A et B, sans donner les tangentes en ces points, l'équation aux limites se réduit à

$$Q_1\delta p_1 - Q_0\delta p_0 = 0 \quad \text{ou} \quad Q_1 = 0, \quad Q_0 = 0;$$

par suite,

$$q_1 = \infty, \quad q_0 = \infty.$$

Les points A et B sont donc les points de rebroussement de la cycloïde.

598. Cette question est celle du numéro précédent généralisée; elle se traite de la même manière. On trouve en effet, pour l'équation différentielle,

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = Cp + C' - n\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n}$$

ou

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = Cp + C',$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\rho^n = \frac{Cp + C'}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En changeant convenablement les axes, cette équation devient

$$\rho^n = \frac{Kp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{\left(\frac{1}{p^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Prenant maintenant l'axe des x pour l'axe des y et réciproquement, et désignant toujours par la lettre p le coefficient angulaire de la tangente, on a

(1) $$\rho^n = \frac{K}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Substituons à ρ sa valeur

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dy}{p\,dp}$$

et intégrons, il vient

$$dx = \frac{(ay+b)^{\frac{n}{n+1}}dy}{\left[1-(ay+b)^{\frac{2n}{n+1}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

On peut démontrer que dans les courbes définies par cette équation différentielle le rayon de courbure est proportionnel à une puissance de l'ordonnée. On tire en effet de

l'équation (1)

$$n\rho^{n-1}d\rho = -\mathrm{K}(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}dp = -\mathrm{K}\frac{dy}{\rho};$$

et, par suite,

$$\rho^{n+1} = hy + l,$$

ou simplement

$$\rho^{n+1} = hy,$$

en changeant convenablement les axes.

(O. Bonnet, *Journal de Liouville*, t. IX.)

599. Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe, ds l'élément de l'arc, r_0 et r_1 les valeurs de r qui correspondent aux constantes x_0 et x_1; si l'on fait seulement varier θ, ce qui est permis, la condition du maximum ou du minimum nous donne

$$d\left(r^{n+2}\frac{d\theta}{ds}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{dr}{r\left[\left(\frac{r^{n+1}}{c}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette équation intégrée (nº 398) prend la forme

$$r^{n+1}\cos(n+1)(\theta-\theta_0) = \mathrm{C} = r_0^{n+1}.$$

Les courbes que cette équation renferme jouissent de la propriété de représenter, dans un grand nombre de cas, les intégrales eulériennes de seconde espèce (Serret, *Journal de Liouville*, t. VII). On les obtient aussi en cherchant la figure d'équilibre d'un fil flexible, homogène, dont la tension varie d'un point à l'autre proportionnellement à l'épaisseur, et dont tous les points sont sollicités par une

force centrale en raison inverse de la distance. (O. Bonnet, *Journal de Liouville*, t. IX.)

600. $$\delta \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^n ds$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} [n(x - x_0)^{n-1} (\delta x - \delta x_0) + (x - x_0)^n d.\delta s].$$

On a d'ailleurs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et, par suite,

$$d.\delta s = \frac{dx}{ds} d.\delta x + \frac{dy}{ds} d.\delta y + \frac{dz}{ds} d.\delta z.$$

Après avoir substitué cette valeur dans la première équation et intégré par parties pour faire sortir du signe $\int$ les différentielles des variations, on arrive aux équations suivantes :

$$(1) \quad d\left[(x - x_0)^n \frac{dz}{ds}\right] = 0, \quad d\left[(x - x_0)^n \frac{dy}{ds}\right] = 0,$$
$$d\left[(x - x_0)^n \frac{dx}{ds}\right] - n(x - x_0)^{n-1} ds = 0,$$
$$A_{x_1} - A_{x_0} - \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} n(x - x_0)^{n-1} ds = 0,$$

A représentant l'expression

$$(x - x_0)^n \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right).$$

Les deux premières suffisent pour déterminer la courbe. On en tire

$$z = ay + b;$$

donc la courbe est plane. Si on la suppose située dans le

d'où l'on tire

$$\int_{x_0}^{x_1} n(x-x_0)^{n-1}\,ds = \left[(x-x_0)^n \frac{dx}{ds}\right]_{x_1} - \left[(x-x_0)^n \frac{dx}{ds}\right]_{x_0}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[(x-x_0)^n \frac{dx}{ds}\right]_{x_1} \delta x_0 + \left[(x-x_0)^n \frac{dy}{ds}\right]_{x_0} \delta y_0 \\ &\qquad + \left[(x-x_0)^n \frac{dz}{ds}\right]_{x_0} \delta z_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans les multiplicateurs de δy_0 et δz_0 on peut remplacer l'indice x_0 par l'indice x_1, car on a, pour tous les points de la courbe,

$$(x-x_0)^n \frac{dx}{ds} = \text{const.}, \quad (x-x_0)^n \frac{dz}{ds} = \text{const.}$$

L'équation (4) ainsi modifiée prouve que la tangente à la courbe cherchée au point P_1 est perpendiculaire à la tangente au point P_0 considérée comme appartenant à la courbe C_0.

L'intégration des équations (1) introduira quatre constantes, et il y aura en outre à déterminer les six coordonnées des points P_0 et P_1. Il est facile de voir, d'après la méthode générale, qu'on obtiendra en tout dix équations pour calculer ces valeurs.

Les courbes renfermées dans l'équation (2) s'obtiennent en faisant rouler sur l'axe des y les courbes dont l'équation est

$$r^m \cos m\theta = r_0^m. \qquad (\text{N}^\circ\ 599.)$$

601. Si l'on suppose la génératrice du cylindre parallèle à l'axe des z, la surface a pour équation

$$(1)\qquad \varphi(x, y) = 0.$$

La condition du minimum nous donne, en supposant les limites constantes,

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left(d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y + d\frac{dz}{ds}\delta z \right) = 0.$$

D'ailleurs la relation

$$\frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y = 0,$$

déduite de (1), permet de réduire à deux les variations sous le signe. Il en résulte alors les deux équations suivantes :

$$(3) \qquad d\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dy}d\frac{dx}{ds} - \frac{d\varphi}{dx}d\frac{dy}{ds} = 0,$$

dont la dernière est une conséquence de (1) et (3).

Cette équation (3) apprend que pour toutes les surfaces cylindriques la tangente à la ligne minimum fait un angle constant avec la génératrice. Ce résultat était facile à prévoir.

Si le cylindre est droit, la courbe a pour équations

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$z = bs;$$

c'est une hélice.

602. Il s'agit de rendre maximum l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} (y^2 dx - ay\, ds) = 0.$$

On trouve, en faisant varier seulement l'abscisse,

$$ay\frac{dx}{ds} = y^2 - b;$$

et, par suite,

$$dx = \frac{(y^2 - b)\,dy}{[a^2y^2 - (y^2 - b)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette équation n'est pas intégrable en général, mais on peut toujours obtenir s en fonction de y. On a en effet

$$ds = \frac{ay\,dx}{y^2 - b} = \frac{ay\,dy}{[a^2y^2 - (y^2 - b)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui s'intègre sous forme finie.

Si $b = 0$, la courbe est un cercle.

603. La théorie des maximums et minimums relatifs nous donne

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} [(y^2 + 2ay)\,dx + 2b\,ds] = 0.$$

Si l'on fait seulement varier l'abscisse, il en résulte l'équation différentielle

$$y^2 + 2ay + 2b\frac{dx}{ds} = C,$$

ou

$$(y + a)^2 + 2b\frac{dx}{ds} = C,$$

ou bien encore

$$y^2 + 2b\frac{dx}{ds} = C;$$

et, par suite,

$$dx = \frac{dy\,(C - y^2)}{[4b^2 - (C - y^2)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est l'équation de la courbe élastique (n° 557). C'est aussi celle de la courbe que décrit le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole dont le grand axe est $2b$, et qui roule sans glisser sur l'axe des x.

604. La question revient à trouver la fonction de x qui rend minimum le produit.

$$\int_{x_0}^{x_1}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx \times \int_{x_0}^{x_1} y\,dx. \tag{1}$$

Or, si l'on cherche en général à déterminer une fonction y telle que le produit UV soit maximum ou minimum, U et V désignant deux intégrales définies quelconques prises entre les mêmes limites, on est conduit à la relation

$$U\delta V + V\delta U = 0.$$

Les multiplicateurs des variations sont ici des constantes qu'on pourra calculer dès que la fonction sera connue.

Dans le problème proposé, l'équation à laquelle il faut satisfaire est la suivante :

$$A\delta\int_{x_0}^{x_1} y\,dx + B\delta\int_{x_0}^{x_1}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx = 0, \tag{2}$$

A et B représentant les valeurs constantes que prennent respectivement les deux facteurs du produit (1) pour la valeur cherchée de y.

L'équation (2) peut s'écrire

$$\delta\int\left[cy + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}\right]dx = 0;$$

il en résulte l'équation différentielle

$$c\,dx - d\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

et, par suite,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2.$$

Il est manifeste que l'arc de cercle qui répond à la question doit tourner sa convexité vers l'axe des x.

Les constantes A et B, dont le rapport est le rayon même du cercle, se déterminent au moyen des intégrales dont elles expriment les valeurs.

605. y variant seul, on a

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} s^n dx = n\int_{x_0}^{x_1} s^{n-1}\,dx\,\delta s.$$

Afin de faire apparaître sous le signe la différentielle de δs, on pose

$$\int s^{n-1}\,dx = \mathrm{H}.$$

Il en résulte

$$\int s^{n-1}\,dx\,\delta s = \mathrm{H}\,\delta s - \int \mathrm{H}\,d\,\delta s,$$

et, en ayant égard aux limites qui sont supposées constantes,

$$\int_{x_0}^{x_1} s^{n-1}\,dx\,\delta s = -\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H}\,d\delta s = \int_{x_0}^{x_1} \delta s\,d\left(\mathrm{H}\,\frac{dy}{ds}\right).$$

L'équation de la courbe est donc

$$\mathrm{H}\,\frac{dy}{ds} = a;$$

d'où

$$\mathrm{H}\,d\frac{dy}{ds} + d\mathrm{H}\,\frac{dy}{ds} = 0;$$

et, par suite,

(A) $$a d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dy^2}{ds^2}\,s^{n-1}\,dx = 0.$$

Soit fait $\frac{dy}{ds} = u$, l'équation (A) devient

$$\frac{a\,du}{u^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} + s^{n-1}\,ds = 0,$$

et enfin

$$dy = \frac{na\,ds}{\left[n^2a^2 + (s^n + c)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour $n = 1$, on trouve la chaînette.

606. Le dénominateur de l'expression proposée ne devant pas changer avec la nature de la courbe, il suffit de poser

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} x\varphi\, ds = 0.$$

Cette équation devient, en ne faisant pas varier x,

$$\int_{x_0}^{x_1} (x\varphi' ds\, \delta s + x\varphi d.\delta s) = 0.$$

Afin de faire apparaître partout sous le signe la différentielle de δs, on pose

$$\int x\varphi' ds = \mathrm{H};$$

d'où

$$\int x\varphi' ds\, \delta s = \mathrm{H}\delta s - \int \mathrm{H}\, d.\delta s,$$

et en ayant égard aux limites qui sont constantes,

$$\int_{x_0}^{x_1} x\varphi' ds\, \delta s = -\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H}\, d.\delta s.$$

On trouve alors pour l'équation de la courbe

$$(\mathrm{H} - x\varphi)\frac{dy}{ds} = a,$$

d'où l'on tire

$$ad\frac{dy}{ds} - \frac{dy^2}{ds^2}\varphi\, dx = 0;$$

et, par suite (n° 605),

$$dy = \frac{a\,ds}{\left\{a^2 + [F(s) + C]^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

en posant

$$F(s) = \int \varphi\, ds.$$

Si $\varphi = 1$, on trouve la chaînette.

Le cas général est celui où l'on cherche parmi toutes les courbes de longueur donnée celle dont le centre de gravité est le plus bas, en supposant que la densité soit en chaque point fonction de l'arc qui y aboutit.

607. Posons, pour abréger,

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = y'_2, \ldots,$$

on aura, p désignant le degré d'homogénéité,

$$pu = y'_1 \frac{du}{dy'_1} + y'_2 \frac{du}{dy'_2} + \ldots;$$

par conséquent,

$$(\text{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} p\,du &= y'_1\, d\frac{du}{dy'_1} + y'_2\, d\frac{du}{dy'_2} + \ldots \\ &\quad + \frac{du}{dy'_1} dy'_1 + \frac{du}{dy'_2} dy'_2 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, puisque l'intégrale $\int u\,dx$ est un maximum ou un minimum, sa variation est nulle. En observant que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sont liées par aucune relation, il en résulte

$$d\frac{du}{dy'_1} = \frac{du}{dy_1} dx, \quad d\frac{du}{dy'_2} = \frac{du}{dy_2} dx, \ldots.$$

Par suite, l'équation (A) devient

$$\left.\begin{aligned} p\,du = \frac{du}{dy_1}dy_1 + \frac{du}{dy_2}dy_2 + \ldots \\ + \frac{du}{dy'_1}dy'_1 + \frac{du}{dy'_2}dy'_2 + \ldots \end{aligned}\right\} = du;$$

et comme p est supposé différent de 1, on en conclut

$$u = C. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS DIVERSES.

608. Vérifier la relation

$$x^p - \binom{m}{1}(x-h)^p + \ldots + (-1)^n \binom{m}{n}(x-nh)^p + \ldots + (-1)^m (x-mh)^p = 0,$$

où l'on a $m > p$, m et p représentant des nombres entiers.

609. Vérifier la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (x+a)^m = x^m &+ \binom{m}{1} a (x+b)^{m-1} + \ldots \\ &+ \binom{m}{n} a (a-nb)^{n-1} (x+nb)^{m-n} + \ldots \\ &+ a(a-mb)^{m-1}, \end{aligned} \right.$$

où l'on suppose m entier positif.

(ABEL.)

610. Si $f(z)$ est une fonction qui prenne la forme $P + Qi$ quand on pose

$$z = x + iy,$$

P et Q étant des fonctions réelles en x et y, on a généra-

lement

(1) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^nP}{dx^k dy^{n-k}} &= \frac{d^nQ}{dx^{k-1} dy^{n-k+1}},\\ \frac{d^nQ}{dx^k dy^{n-k}} &= -\frac{d^nP}{dx^{k-1} dy^{n-k+1}};\end{aligned}\right.$$

(2) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^nP}{dx^k dy^{n-k}} &= -\frac{d^nP}{dx^{k-2} dy^{n-k+2}},\\ \frac{d^nQ}{dx^k dy^{n-k}} &= -\frac{d^nQ}{dx^{k-2} dy^{n-k+2}}.\end{aligned}\right.$$

(Prouhet.)

611. Log$x$ ne peut être égal à une fonction rationnelle de x. (Liouville.)

612. Déterminer $\varphi(x)$ par la condition

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\varphi(x).$$

613. Démontrer que la fonction $\varphi(x)$ est identiquement nulle si on a, pour toute valeur de n,

$$\int_a^b x^n \varphi(x)\,dx = 0.$$

614. Trouver, au moyen de la formule de Wallis, la limite des expressions

$$n^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\,d\theta,\quad n^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\,d\theta,$$

quand n croît indéfiniment.

615. Soit la fonction

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n)^2 + \text{etc.},$$

le nombre des polynômes élevés au carré étant égal à n.

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont liées par des relations linéaires à n autres variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle sorte qu'au moyen de ces dernières la fonction prend la forme

$$A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + \ldots + A_n u_n^2;$$

démontrer que le produit $A_1 A_2 \ldots A_n$ est un carré parfait.

616. Quelle doit être la relation $s = \varphi(x)$, pour que l'intégrale

$$\int_0^h \frac{ds}{(h-x)^{\frac{1}{2}}}$$

soit indépendante de h?

617. Quelle doit être la relation $s = \varphi(x)$ pour que l'intégrale

$$\int_0^h (h-x)^n ds$$

soit indépendante de h?

618. Étant données les deux équations

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_1 y)}{dx^{n-1}} + \ldots \pm p_n y = 0,$$

dans lesquelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des fonctions de x, démontrer que toute solution de l'équation (1) est un facteur qui rend intégrable l'équation (2), et réciproquement.

619. Étant donnée l'équation

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

dans laquelle V, K et G sont des fonctions de x, K restant constamment positif, démontrer que V et $\frac{dV}{dx}$ ne peuvent s'annuler pour la même valeur assignée à x. (Sturm.)

620. Si l'on connaît une intégrale première de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y, x),$$

on peut toujours obtenir son intégrale générale au moyen des quadratures. (Jacobi.)

621. Soit l'expression

$$(A)\quad D^n y + A_1 D^{n-1} y + \ldots + A_p D^{n-p} y + \ldots + A_n y = f(y),$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ représentent des fonctions de la variable x, et où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d^p y}{dx^p} = D^p y.$$

Si l'on désigne par u et v deux fonctions de la même variable, on trouve

$$(B)\quad \begin{cases} f(uv) = uf(v) + Du.'f(v) + \ldots \\ \qquad + \frac{D^p u}{1.2\ldots p}\,{}^{(p)}f(v) + \ldots + \frac{D^n u}{1.2\ldots n}\,{}^{(n)}f(v); \end{cases}$$

quelle est la loi de formation des quantités ${}^{(p)}f(v)$?

622. L'expression ${}^{(p)}f(y)$ étant dite la *conjuguée* $p^{ième}$ de $f(y)$ (n° 621), on a les théorèmes :

1° Si la fonction y_1 annule identiquement $f(y)$ et ses $p-1$ premières conjuguées, l'équation différentielle

$$(1)\qquad f(y) = 0$$

admet les solutions

$$(2)\qquad cy_1,\quad c_1 x y_1,\quad c_2 x^2 y_1, \ldots,\quad c_{p-1} x^{p-1} y_1,$$

$c, c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ désignant des constantes arbitraires.

2° Si les p solutions (2) satisfont à l'équation (1), l'équation

$$^{(h)}f(y) = 0$$

est satisfaite également par les $p - h$ premières solutions (2).

3° Si les équations

$$f(y) = 0, \quad 'f(y) = 0$$

ont une solution commune cy_1, et si la seconde est satisfaite en outre par les solutions

$$(3) \qquad c_1 x y_1, \quad c_2 x^2 y_1, \ldots, \quad c_{n-2} x^{n-2} y_1,$$

la première l'est aussi, et elle admet de plus la solution

$$c_{n-1} x^{n-1} y_1.$$

623. Soit y_1 une solution de l'équation linéaire

$$Dy + A_1 y = 0;$$

si l'on déduit de cette équation la suivante,

$$(1) \quad D^n y + \binom{n}{1} A_1 D^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{p} A_p D^{n-p} y + \ldots + A_n y = \varphi_n(y) = 0,$$

dans laquelle on a

$$A_{p+1} = A_1 A_p + A'_p,$$

A'_p désignant $\frac{dA_p}{dx}$, cette nouvelle équation est satisfaite par les n intégrales

$$cy_1, \quad c_1 x y_1, \ldots, \quad c_{n-1} x^{n-1} y_1. \qquad \text{(Brassine.)}$$

624. L'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

est satisfaite par l'intégrale

$$\iiint \frac{da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

dans laquelle on suppose les limites constantes. Trouver une solution de forme semblable pour l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d^2V}{du^2}+\ldots=0,$$

n étant le nombre des variables indépendantes.

625. Sachant qu'une fonction $F(x)$ est égale à la somme de la série convergente

$$A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots+A_n\cos nx+\ldots$$

pour toutes les valeurs de la variable comprises entre 0 et π, ainsi que pour ces limites, démontrer qu'on a généralement

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,dx.$$

626. La proposition précédente étant vraie pour la fonction

$$e^{ax}+e^{-ax},$$

en conclure la relation

$$\frac{\pi}{2}\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2a}-\frac{a\cos x}{a^2+1^2}+\frac{a\cos 2x}{a^2+2^2}-\frac{a\cos 3x}{a^2+3^2}+\ldots.$$

627. Sommer les séries

$$\frac{1}{u^2+1^2}+\frac{1}{u^2+2^2}+\frac{1}{u^2+3^2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{u^2+1^2}+\frac{1}{u^2+3^2}+\frac{1}{u^2+5^2}+\ldots.$$

(Euler.)

628. Sommer la série

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

629. Trouver la courbe dans laquelle la projection du rayon vecteur sur la tangente a un rapport constant avec la distance du pôle à cette même tangente.

630. Trouver la courbe dans laquelle la distance de l'origine au pied de la normale a un rapport constant avec la longueur de cette normale.

631. Trouver la courbe dont l'aire est égale au cube de l'ordonnée divisée par l'abscisse.

632. Trouver la trajectoire orthogonale des lemniscates dont l'équation est

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

a étant un paramètre variable.

633. Trajectoire orthogonale des ellipses données par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le paramètre variable étant b.

634. (*Fig.* 27.) Trouver la courbe qui coupe une série de paraboles ayant même axe et même sommet, de telle sorte que les aires AMP, AM′P′ soient égales à une surface donnée.

635. Trouver la courbe qui rencontre une série de cercles concentriques de telle sorte que les arcs de ces cercles, compris entre une droite fixe menée par le centre et les divers points de rencontre, aient une longueur constante.

636. On peut toujours trouver, sur un quadrant d'ellipse, deux points tels, que les normales qui y passent soient à la même distance du centre. Relation qui lie les abscisses de ces deux points. (Points associés.)

637. Soient m et m_1 deux points pris sur un même quadrant d'ellipse, μ et μ_1 leurs *points associés* (n° 636); démontrer la relation

$$\text{arc}\, mm_1 - \text{arc}\, \mu\mu_1 = p_1 - p,$$

p_1 et p étant les longueurs des perpendiculaires abaissées du centre de l'ellipse sur les normales aux points m et m_1.

638. Trouver une courbe telle, que la longueur de l'arc soit dans un rapport constant avec la distance de l'origine au pied de la tangente.

639. Trouver la courbe dans laquelle le rayon de courbure est égal à n fois la normale.

640. Trouver une courbe telle, que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses divers points, la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur engendre une courbe semblable à la première.

641. Trouver une courbe semblable à sa développée.

642. Trouver la courbe dans laquelle une puissance donnée de l'abscisse est proportionnelle à l'arc.

643. On suppose que la courbe dont l'équation est, en coordonnées polaires,

$$r^m \cos m\theta = a^m,$$

roule sur une droite donnée, et l'on demande le lieu décrit par le pôle.

644. Si les plans normaux d'une courbe sont tangents à une sphère donnée, la courbe est rectifiable.

645. Trouver la courbe qui coupe sous un angle constant toutes les génératrices d'un cône droit.

646. Lieu des points de rencontre des plans tangents menés à un ellipsoïde par les extrémités de trois diamètres conjugués.

647. Par le centre O d'un ellipsoïde on mène un plan quelconque et une normale à ce plan, puis on porte sur cette normale, et dans le même sens, des longueurs OA, OB égales aux demi-axes principaux de la section obtenue; trouver le lieu des points A et B.

648. Surface enveloppe d'un plan qui touche deux sphères données.

649. Surface enveloppe des plans normaux à l'ellipse sphérique (nº 302).

650. Par un point M d'une surface on mène un plan tangent, et d'un point fixe O on abaisse sur ce plan une perpendiculaire OH. Si l'on prend sur OH un point M' tel, qu'on ait OM'.OH égal à une constante K^2, le lieu des points M' est tel, que la perpendiculaire OH' abaissée sur son plan tangent en M' passe par le point M; et l'on a aussi

$$OM.OH' = K^2.$$

651. On donne deux ellipsoïdes P et P_1, concentriques, semblables et semblablement placés; des points de P_1 comme sommets on décrit des cônes tangents à P : démontrer que deux quelconques de ces cônes se coupent suivant deux courbes planes.

652. Étant donnée une surface qui sépare deux milieux homogènes, on suppose que des rayons lumineux passent de l'un dans l'autre en suivant les lois ordinaires de la ré-

fraction. Démontrer que si les rayons incidents sont normaux à une même surface, les rayons réfractés seront aussi normaux à une autre surface. (DUPIN.)

653. Trouver la surface qui coupe à angle droit toutes les sphères passant par un point donné et dont les centres sont sur une droite fixe menée par ce point.

654. Équation générale des surfaces qui coupent à angle droit l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

655. Trouver une surface telle, que la distance d'un point donné A au point où une droite fixe AB rencontre le plan tangent en M soit proportionnelle à la longueur AM.

656. Trouver la surface pour laquelle les coordonnées du point où la normale rencontre le plan des xy sont proportionnelles aux coordonnées correspondantes du point de la surface.

657. Trouver la surface de révolution pour laquelle la somme des courbures principales (courbure moyenne) est nulle en chaque point.

SOLUTIONS DES QUESTIONS DIVERSES.

608. Désignons par A_p le premier membre de la relation proposée. On voit facilement que A_1 est nul, quelles que soient les quantités x et h. Cela posé, la différentiation donne

$$\frac{dAp}{dh}=mp\left[(x-h)^{p-1}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}(x-nh)^{p-1}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{m-1}(x+mh)^{p-1})\right].$$

Si l'on fait $x-h=z$, le multiplicateur de mp devient

$$z^{p-1}-\binom{m-1}{1}(z-\overline{m-1}\,h)^{p-1}+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}(z-\overline{n-1}\,h)^{p-1}+\ldots$$
$$+(-1)^{m-1}(z-\overline{m-1}\,h)^{p-1}.$$

Or, pour $p=2$, ce facteur est identiquement nul, pourvu que m soit supérieur à p. A_2 est donc indépendant de h, et comme il est manifestement égal à zéro en même temps que h, la relation est vérifiée pour $p=2$. On l'étend sans peine aux valeurs plus grandes.

609. La relation est évidente quand $m=1$. En désignant le second membre par A_m, les dérivées des deux membres

par rapport à x sont respectivement

(2) $$m(x+a)^{m-1}, \quad m A_{m-1}.$$

Si ces résultats sont égaux pour une certaine valeur de m, les fonctions $(x+a)^m$ et A_m ne pourront différer que d'une quantité indépendante de x; et comme elles sont égales pour $x=-a$ (n° 608), leur différence devra être nulle. Or, les expressions (2) sont égales quand $m=2$; la relation (1) se trouve donc vérifiée pour cette valeur, et par suite pour toutes les autres.

La relation (1), qui généralise d'une manière si remarquable le binôme de Newton, a été donnée par Abel dans le tome Ier du *Journal de Crelle*.

610. En prenant les dérivées des deux membres de l'identité

$$f(z)=P+Qi,$$

on a

$$f'(z)\frac{dz}{dx}=f'(z)=\frac{dP}{dx}+i\frac{dQ}{dx},$$

$$f'(z)\frac{dz}{dy}=if'(z)=\frac{dP}{dy}+i\frac{dQ}{dy};$$

d'où

(3) $$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx}.$$

Ces relations (3) montrent que les courbes données par les équations

$$P=\alpha, \quad Q=\beta,$$

où α et β sont des constantes, se coupent à angle droit.

Différentiant les identités (3), il vient

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{d^2Q}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2P}{dx\,dy}=\frac{d^2Q}{dy^2},$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2}=-\frac{d^2P}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2Q}{dx\,dy}=-\frac{d^2P}{dy^2};$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \frac{d^2P}{dx^2} = -\frac{d^2P}{dy^2}, \quad \frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{d^2Q}{dy^2},$$

ce qui démontre que les fonctions P et Q satisfont à une même équation aux différentielles partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

Si l'on différentie les équations (3) $k-1$ fois par rapport à x, et $n-k+1$ par rapport à y, on en déduit les formules (1). Les formules (2) se tirent des équations (4) en opérant d'une manière analogue.

Ces formules (1) et (2), dues à M. Prouhet, l'ont conduit à des résultats algébriques et géométriques fort intéressants. (Sturm, *Cours d'Analyse*, Note IV de la deuxième édition.)

611. Il faut démontrer qu'on ne peut avoir

$$\log x = \frac{f}{\varphi},$$

f et φ désignant deux fonctions algébriques entières de x et premières entre elles. Pour cela, différentions l'égalité précédente, elle donne

$$(1) \qquad \frac{\varphi^2}{x} = \varphi f' - f\varphi'.$$

Il résulte de là que φ doit être divisible par x, et que f ne doit pas l'être. Faisons donc

$$\varphi = \psi x^n,$$

ψ étant un nouveau polynôme non divisible par x; nous en conclurons

$$\varphi' = n\psi x^{n-1} + \psi' x^n.$$

Substituant cette valeur et celle de φ dans l'équation (1), il vient

$$\psi^2 x^{2n-1} = \psi f' x^n - n\psi f x^{n-1} - f\psi' x^n,$$

ou bien

$$nf\psi = x(\psi f' - f\psi') - \psi^2 x^n.$$

Cette dernière égalité est absurde, car le second membre est divisible par x et le premier ne peut l'être, f et ψ étant premiers avec x. Donc, etc.

612. Posons

$$\alpha x = z,$$

il en résulte

$$\int_0^x \varphi(z)\,dz = nx\varphi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx;$$

et en différentiant les deux membres par rapport à x,

$$n[x\varphi'(x) + \varphi(x)] = \varphi(x).$$

D'où

$$\varphi(x) = Cx^{\frac{1-n}{n}}.$$

613. Si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas nulle depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, elle doit changer de signe dans cet intervalle, sans quoi, les éléments de l'intégrale étant tous de même signe pour une valeur convenable de n, l'intégrale ne pourrait être nulle. Supposons donc que $\varphi(x)$ change de signe, trois fois par exemple, et soient x_1, x_2, x_3 les valeurs de x qui donnent lieu à ce changement. Soit fait

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Puisque l'intégrale est nulle pour toutes les valeurs entières de n, on a

$$\int_a^b x^3\varphi(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b x^2\varphi(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b x\varphi(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 0;$$

et, par suite,

$$\int_a^b (\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x+\mathrm{D})\,\varphi(x)\,dx=\int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx=0.$$

La dernière équation ne peut exister puisque, $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ changeant toujours de signe en même temps, l'élément de l'intégrale a toujours même signe. D'ailleurs le raisonnement resterait le même quel que fût le degré de ψ; donc, etc.

614. La formule de Wallis consiste en ce qu'on a, quand n croît indéfiniment,

$$\lim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}{2.2.4.4\ldots2n.2n}=1,$$

ou bien

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim\frac{3.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2.4.6\ldots2n}.$$

Or

$$\mathrm{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n};$$

par conséquent,

$$\lim \mathrm{A}.n^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}\lim\frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2.4\ldots2n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\lim n^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{\varpi}{2}\cdot\left(\frac{2}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\varpi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

L'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta=\frac{2.4\ldots2n}{3.5\ldots(2n+1)}$$

conduirait d'une manière analogue à la relation

$$\lim n^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \, d\theta = \frac{\varpi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

615. Considérons l'intégrale

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-X},$$

dans laquelle X représente, pour abréger, l'expression

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n)^2 + \ldots$$

Pour en obtenir la valeur, changeons de variables et posons

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = z_1,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations étant du premier degré, l'élément de l'intégrale transformée sera

$$\alpha \, dz_1 \, dz_2 \ldots dz_n \, e^{-z_1^2 - z_2^2 - \ldots},$$

les limites étant les mêmes et α représentant un coefficient rationnel en $a_1, b_1, \ldots$. Comme on a, d'après la formule B, p. 280,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2} du = \left(\frac{\varpi}{h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

il en résulte

$$K = \alpha\varpi^{\frac{n}{2}}.$$

D'un autre côté, il suit des conditions données qu'on a encore

$$K = \alpha' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n \, e^{-A_1u_1^2 - A_2u_2^2 - \ldots},$$

α' étant rationnel par rapport aux quantités a_1, b_1, ...
On trouvera donc

$$K = \frac{\alpha'}{(A_1 A_2 \ldots A_n)^{\frac{1}{2}}} \varpi^{\frac{n}{2}};$$

et, par suite,

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha'}{\alpha'},$$

quantité rationnelle.

C. Q. F. D.

616. Soit

$$T = \int_0^h (h - x)^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^h (h - x)^{-\frac{1}{2}} \varphi'(x)\, dx.$$

Afin d'avoir des limites indépendantes de h, posons

$$zh = x;$$

il vient

$$T = \int_0^1 h^{\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} \varphi'(zh)\, dz.$$

Il faut que $\frac{dT}{dh}$ soit nul, quel que soit h; on a donc

$$o = \frac{dT}{dh} = \int_0^1 dz\, (1 - z)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} \varphi'(zh) + h^{\frac{1}{2}} \varphi''(zh)\, z \right],$$

$$= \int_0^1 dz\, h^{-\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \varphi'(zh) + zh \varphi''(zh) \right].$$

Soit fait

$$\frac{1}{2} \varphi'(x) + x \varphi''(x) = F(x),$$

il en résulte

$$\frac{dT}{dh} = \int_0^1 dz\, (h - zh)^{-\frac{1}{2}} F(zh) = \int_0^h \frac{F(x)\, dx}{h (h - x)^{\frac{1}{2}}} = o.$$

Pour que l'intégrale soit nulle, quel que soit h, il faut que $F(z)$ soit nul identiquement; car si $F(x)$ n'est pas nul, on peut prendre h assez petit pour que $F(x)$ garde le même signe dans toute l'étendue de l'intégrale, et comme le facteur $\frac{1}{h(h-x)^{\frac{1}{2}}}$ est toujours positif, l'intégrale ayant tous ses éléments de même signe ne saurait être nulle. Donc

$$\varphi'(x) + 2x\varphi''(x) = 0.$$

On tire de là

$$\varphi'(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dx};$$

c'est l'équation différentielle de la cycloïde.

Le problème que nous venons de résoudre n'est autre que celui de la *tautochrone* dans le vide.

(Puiseux.)

617. En raisonnant comme dans le numéro qui précède, on trouve

$$dy = [A^2 x^{-2(n+1)} - 1]^{\frac{1}{2}} dx.$$

618. Multiplions l'équation (1) par le facteur $z\,dx$, z étant une indéterminée, et intégrons par parties de manière à débarrasser y de tout signe de différentiation sous le signe $\int$. Un terme tel que $p_1 \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}$ donnera naissance à l'intégrale

$$\pm \int y \frac{d^{n-k}(p_k z)}{dx^{n-k}} dx,$$

le signe + répondant à $n-k$ pair et le signe — à $n-k$ impair. Ainsi, le résultat de l'intégration se composera d'une partie débarrassée du signe $\int$ et de l'intégrale

$$\pm \int y \left[\frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(p_2 z)}{dx^{n-2}} + \ldots \pm p_n z \right] dz.$$

Si z satisfait à l'équation (2), l'intégrale s'évanouit; l'équation (1) devient donc intégrable quand on la multiplie par une solution de l'équation (2).

L'autre partie de la proposition se voit facilement de la même manière.

619. Supposons que V ne soit pas nulle pour $x=a$. Comme l'équation différentielle proposée est du second ordre, on peut concevoir une fonction V_1 qui y satisfasse, et qui diffère de V en ce qu'on en tire, pour $x = a$, des valeurs arbitraires de V_1 et de $\frac{dV_1}{dx}$ différentes de celles de V et de $\frac{dV}{dx}$.

On a donc

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0, \quad \frac{d\left(K\frac{dV_1}{dx}\right)}{dx} + GV_1 = 0;$$

d'où résulte, en multipliant la première par $V_1\,dx$ et la seconde par $V\,dx$ et retranchant,

$$V_1 d\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V d\left(K\frac{dV_1}{dx}\right) = 0 = d\left[K\left(V_1\frac{dV}{dx} - V\frac{dV_1}{dx}\right)\right];$$

par conséquent,

$$K\left(V_1\frac{dV}{dx} - V\frac{dV_1}{dx}\right) = \text{const.}$$

On suppose que V n'est pas nulle pour $x = a$, et l'on peut se donner à volonté, pour $x = a$, des valeurs de V_1 et $\frac{dV_1}{dx}$ telles, que l'expression

$$K\left(V_1\frac{dV}{dx} - V\frac{dV_1}{dx}\right)$$

ait pour $x = a$ une valeur différente de zéro, qui sera celle de la constante. On voit alors que, pour toute autre valeur de x, on ne peut avoir en même temps

$$V = o, \quad \frac{dV}{dx} = o,$$

puisqu'il s'ensuivrait const. = o, ce qui est contre l'hypothèse.

Il suit de ce qui précède que la fonction V change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. On le fait voir absolument comme dans la démonstration du théorème de Sturm.

620. Soit

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, x, a)$$

l'intégrale première connue renfermant la constante arbitraire a. On trouve, en différentiant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dy}\varphi + \frac{d\varphi}{dx},$$

et, par suite,

$$F(y, x) = \frac{d\varphi}{dy}\varphi + \frac{d\varphi}{dx}.$$

Différentions par rapport à a cette nouvelle équation, elle donne

$$o = \frac{d^2\varphi}{da\,dy}\varphi + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{da} + \frac{d^2\varphi}{da\,dx},$$

ou bien

$$o = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{da}\varphi\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{d\varphi}{da}\right)}{dx},$$

ce qui est la condition pour que l'expression

$$\frac{d\varphi}{da}dy - \frac{d\varphi}{da}\varphi\,dx$$

soit une différentielle exacte. On a donc pour l'intégrale générale

$$\int \frac{d\varphi}{du}(dy - \varphi dx) = C.$$

(*Journal de Liouville*, t. XIV.)

621. En appliquant la formule connue

$$D^m(uv) = uv^{(m)} + \binom{m}{1} u' v^{(m-1)} + \ldots$$
$$+ \binom{m}{p} u^{(p)} v^{(m-p)} + \ldots + vu^{(m)},$$

et prenant $f(v)$ sous la forme

$$f(v) = v^{(n)} + A_1 v^{(n-1)} + \ldots + A_p v^{(n-p)} + \ldots + A_n v,$$

on reconnaît que ${}^{(p)}f(v)$ s'obtient en formant la dérivée d'ordre p de $f(v)$, pourvu qu'on y considère les indices de dérivation comme des exposants et qu'on y suppose la fonction v affectée de l'indice de différentiation o. Dans cette opération *symbolique*, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ jouent le rôle de constantes. On trouve de cette manière

$$'f(v) = nv^{(n-1)} + (n-1)A_1 v^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} v,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$${}^{(n-1)}f(v) = n(n-1)\ldots 2v' + (n-1)\ldots 2.1\, A_1 v,$$
$${}^{(n)}f(v) = n(n-1)\ldots 2.1.v.$$

La même loi de formation permet évidemment de développer $'f(uv), ''f(uv), \ldots, {}^{(p)}f(uv), \ldots$, etc. M. Brassine a désigné l'expression ${}^{(p)}f(v)$ sous le nom de *conjuguée d'ordre p* ou de *conjuguée* $p^{ième}$ de l'expression $f(v)$.

Observons que si l'on pose

$$D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots + A_p D^{n-p} + \ldots + A_n = \varphi(D),$$

on peut écrire *symboliquement*,

$$f(y) = \varphi(D).y;$$

et il est facile de reconnaître qu'on a, pour toute valeur entière et positive de p,

$$^{(p)}f(y) = \varphi^{(p)}(D).y.$$

Cette nouvelle forme de la conjuguée $p^{ième}$ de $f(y)$ est remarquable. Elle permet de remplacer la relation (B) par celle-ci, analogue à la série de Taylor pour le cas des fonctions entières :

$$\varphi(D).uv = u\varphi(D).v + Du\varphi'(D).v + \ldots$$
$$+ \frac{D^p u}{1.2\ldots p}\varphi^{(p)}(D).v + \ldots + \frac{D^n u}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(D).v.$$

On développerait évidemment de la même manière la conjuguée d'ordre quelconque

$$\varphi^{(p)}(D).uv.$$

622. 1° Si l'on pose $v = y_1$ dans l'équation (B) du numéro précédent, elle devient

$$f(uy_1) = {}^{(p)}f(y_1)\frac{D^p u}{1.2\ldots p} + \ldots + y_1 D^n u,$$

et l'on voit que le second membre s'annule si l'on assigne à u l'une quelconque des valeurs

$$c,\quad c_1 x,\quad c_2 x^2, \ldots,\quad c_{p-1} x^{p-1};$$

il en résulte que l'équation linéaire

$$f(y) = 0$$

admet les solutions

$$cy_1,\quad c_1 xy_1, \ldots,\quad c_{p-1} x^{p-1} y_1.$$

2° Soit fait $u = x$ dans la même équation (B), elle se réduit à

$$f(vx) = xf(v) + {}'f(v).$$

En y substituant à v les valeurs y_1, $xy_1, \ldots, x^{p-2}y_1$, on voit que ces valeurs annulent $'f(v)$, d'où il suit que l'équation linéaire

$$'f(y) = 0$$

admet les $p - 1$ premières solutions (2).

Il suit de là que l'équation

$$''f(y) = 0$$

admet les $p - 2$ premières solutions (2), et ainsi de suite.

3° D'après l'hypothèse, on doit avoir

$$f(y_1) = 0, \quad 'f(y_1) = 0, \ldots, \quad {}^{(n-1)}f(y_1) = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (B),

$$f(uy_1) = y_1 D^n u.$$

Or, pour toute puissance entière et positive de x inférieure à n, mise à la place de u, on a $f(uy_1) = 0$, c'est-à-dire que l'équation $f(y) = 0$ admet les solutions (3), et de plus la solution $c_{n-1}x^{n-1}y_1$.

Si l'on assimile les solutions (2) aux racines égales des équations algébriques, les propositions de ce numéro établissent, entre ces équations et les équations différentielles linéaires, des analogies remarquables signalées par M. Brassine, auquel on doit d'intéressantes recherches sur ce sujet. (STURM, *Cours d'Analyse*, Note III de la deuxième édition.)

623. On reconnaît d'abord que l'équation (1) admet la solution y_1, pour $n = 2$. Afin de prouver qu'il en est de même dans tous les cas, de l'identité

$$(2)\quad D^n y_1 + \binom{n}{1} A_1 D^{n-1} y_1 + \ldots + \binom{n}{p} A_p D^{n-p} y_1 + \ldots + A_n y_1 = 0,$$

supposée vraie pour n, on tire en différentiant

$$(3)\left\{\begin{aligned} &D^{n+1}y_1 + \binom{n}{1} A_1 D^n y_1 + \ldots + \binom{n}{p+1} A_{p+1} D^{n-p} y_1 + \ldots \\ &\quad + \binom{n}{p} A'_p D^{n-p} y_1 + \ldots + A'_n y_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Multipliant par A_1 les deux termes de l'équation (2) et l'ajoutant membre à membre à l'équation (3), on obtient une nouvelle égalité dans laquelle le multiplicateur de $D^{n-p}y$ est égal à

$$\binom{n}{p+1} A_{p+1} + \binom{n}{p} \left(A_1 A_p + A'_p\right),$$

quantité qui se réduit à

$$\binom{n+1}{p+1} A_{p+1},$$

en vertu des notations adoptées. Il en résulte que l'identité (2) subsiste quand on y remplace n par $n+1$, c'est-à-dire que l'équation

$$\varphi_n(y) = 0$$

admet la solution y_1, quel que soit n.

Pour compléter la démonstration du théorème, il faut prouver que si l'équation (1) admet les solutions

$$c y_1, \quad c_1 x y_1, \ldots, \quad c_{n-1} x^{n-1} y_1,$$

l'équation

$$(4) \qquad \varphi_{n+1}(y) = 0$$

les admettra aussi et sera satisfaite en outre par la solution $c_n x^n y_1$. Il suffit pour cela de chercher la conjuguée

$'\varphi_{n+1}(y)$, qu'on trouve égale à $n\varphi_n(y)$, et de se reporter à la solution du n° 622 (3°).

On arrive au même résultat en prouvant généralement que si z désigne une solution quelconque de l'équation (1), l'équation (4) est satisfaite par la solution zx. Le premier membre de cette équation peut en effet s'écrire

$$\sum \binom{n+1}{p} A_p D^{n+1-p} y,$$

d'où résulte, en y remplaçant y par zx,

$$x\varphi_{n+1}(z) + (n+1)\varphi_n(z),$$

quantité qui est nulle, puisque z satisfait à l'équation (1) et par suite à l'équation (4). On conclut de là que l'équation $\varphi_2(y) = 0$ admet les solutions cy_1 et c_1xy_1; puis, que l'équation $\varphi_3(y) = 0$ admet les solutions cy_1, c_1xy_1, $c_2x^2y_1$, et ainsi de suite.

624. L'analogie indique la forme suivante :

$$V = \iiint \cdots \frac{da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\ldots]^p},$$

p étant une indéterminée. On tire de là

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -2p\iiint \cdots \frac{da\,db\,dc\,\ldots}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\ldots]^{p+1}}$$
$$+4p(p+1)\iiint \cdots \frac{(x-a)^2\,da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\ldots]^{p+2}};$$

par conséquent,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + \cdots$$
$$= [4p(p+1) - 2pn]\iiint \cdots \frac{da\,db\,dc\ldots}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\ldots]^{p+1}}.$$

Le second membre sera nécessairement nul, si l'on pose $p = \frac{n}{2} - 1$; la solution demandée est donc

$$V = \int\int\int \cdots \frac{da\,db\,dc \ldots}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \ldots]^{\frac{n}{2}-1}}.$$

625.
$$\int_0^\pi F(x) \cos nx\,dx$$
$$= \int_0^\pi (A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots) \cos nx\,dx;$$

et comme $\int_0^\pi \cos px \cos qx dx$ est nul toutes les fois que les nombres entiers p et q sont différents l'un de l'autre, il en résulte

$$\int_0^\pi F(x) \cos nx\,dx = A_n \int_0^\pi \cos^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2} A_n.$$

C. Q. F. D.

626. De l'égalité

$$\int e^{ax} \cos nx\,dx = \frac{n \sin nx + a \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax} + C$$

on déduit

$$\int_0^\pi (e^{ax} + e^{-ax}) \cos nx\,dx = \frac{a\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)}{a^2 + n^2} \cos n\pi;$$

d'où

$$A_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n a \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a^2 + n^2}.$$

De là résulte immédiatement la relation proposée.

627. Soit fait

$$x = \pi, \quad a = u$$

dans la relation précédente, elle donne

$$\frac{\pi}{2}\frac{e^{u\pi}+e^{-u\pi}}{e^{u\pi}-e^{-u\pi}}=\frac{1}{2u}+\frac{u}{u^2+1^2}+\frac{u}{u^2+2^2}+\ldots,$$

ou bien

$$\frac{u\pi-1}{2u^2}+\frac{\pi}{u\left(e^{2u\pi}-1\right)}=\frac{1}{u^2+1^2}+\frac{1}{u^2+2^2}+\ldots.$$

Remplaçons maintenant dans la même relation x par o, a par u, et retranchons le nouveau résultat de celui qu'on vient d'écrire, on trouve

$$\frac{\pi}{4u}-\frac{\pi}{2u\left(e^{u\pi}+1\right)}=\frac{1}{u^2+1^2}+\frac{1}{u^2+3^2}+\ldots.$$

(N° 169.)

628. Faisons

$$x=0$$

dans la relation du n° 626, elle donne

$$\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}$$
$$=\frac{1}{a^2+1^2}-\frac{1}{a^2+2^2}+\frac{1}{a^2+3^2}-\frac{1}{a^2+4^2}+\ldots.$$

Pour $a=0$, la vraie valeur du premier membre est $\frac{\pi^2}{12}$.

629. a désignant le rapport donné, l'angle du rayon vecteur avec la tangente a pour tangente trigonométrique $\frac{1}{a}$. On a donc

$$\frac{rd\theta}{dr}=\frac{1}{a};\quad \text{d'où}\quad r=Ce^{a\theta},$$

équation de la spirale logarithmique.

24

630. $$y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(x+\frac{y\,dy}{dx}\right);$$

et en résolvant par rapport à $y\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{(a^2-1)\,y\dfrac{dy}{dx}+a^2x}{[(a^2-1)y^2+a^2x^2]^{\frac{1}{2}}}=\pm 1.$$

L'équation intégrale

$$[(a^2-1)\,y^2+a^2x^2]^{\frac{1}{2}}=C\pm x$$

représente des cercles.

631. $$\int y\,dx=\frac{y^2}{x};$$

et en différentiant,

$$(x^2+y^2)\,dx=3xy\,dy.$$

On trouve pour l'intégrale de cette équation homogène

$$x^2-2y^2=Cx^{\frac{2}{3}}.$$

632. Posons

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=F(x,y),$$

d'où

$$\frac{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dF}{dy}\right)}=-\frac{x}{y}\,\frac{3y^2-x^2}{3x^2-y^2};$$

l'équation différentielle est donc, d'après la théorie des trajectoires orthogonales,

$$1+\frac{dy}{dx}\,\frac{x\,(3y^2-x^2)}{y\,(3x^2-y^2)}=0.$$

Cette équation homogène donne par l'intégration

$$(x^2+y^2)^2 = C^2 xy,$$

équation d'une lemniscate semblable aux proposées et dont l'axe est incliné de 45 degrés sur celui de ces courbes.

Le problème des trajectoires orthogonales a beaucoup occupé les géomètres. Leibnitz le proposa en 1715 « pour tâter un peu le pouls à nos analystes anglais, » dit-il dans une lettre à l'abbé Conti. Le gant fut relevé par Newton et Taylor, mais le travail le plus approfondi sur cette question appartient à Euler.

633. On trouve

$$y^2 + x^2 - C = a^2 \log x^2.$$

634. Soient

$$(1) \qquad y^2 - 4ax = 0$$

l'équation de l'une des paraboles, b^2 la surface constante; on a

$$(2) \qquad 2\int_0^x (ax)^{\frac{1}{2}}\, dx = b^2 = \frac{4}{3}x(ax)^{\frac{1}{2}}.$$

Les relations (1) et (2) font connaître les coordonnées de l'extrémité de l'arc à laquelle s'arrête l'intégrale, et l'équation

$$2xy = 3b^2,$$

qui en résulte par l'élimination de a, est celle du lieu demandé.

635. Soient b la longueur donnée, $x^2+y^2 = a^2$ l'équation de l'un des cercles, x_1, y_1 les coordonnées d'un point du lieu; on a

$$b = \int_0^y \frac{a\,dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} = a \arc \sin \frac{y_1}{a},$$

et

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2.$$

Éliminant a, il vient

$$\text{arc tang}\frac{y}{x} = \frac{b}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{ou} \quad r\theta = b.$$

Cette dernière équation aurait pu s'obtenir tout de suite, car on a, pour les coordonnées polaires d'un point du lieu,

$$r = a, \quad \theta = \frac{b}{a},$$

et, par suite,

$$r\theta = b.$$

636. Soit

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes. Celle de la normale au point (x, y) est

$$\frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} = a^2 c^2,$$

en posant

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2.$$

On en déduit pour la distance p du centre à la normale

$$p = e^2 x \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

d'où

(1) $$e^4 x^4 - (a^2 e^2 + p^2) e^2 x^2 + a^2 p^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont réelles, si l'on a

(2) $$a - p > b.$$

Cette condition remplie, l'équation (1) donne deux racines

pour x^2. Désignant l'une d'elles par x^2, l'autre par ξ^2, on a

$$x^2 + \xi^2 = \frac{p^2 + a^2e^2}{e^2}, \quad x^2\xi^2 = \frac{a^2p^2}{e^4},$$

et, par suite, la relation demandée

$$(3) \qquad a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + e^2x^2\xi^2 = 0.$$

Les deux points ainsi déterminés sont des *points associés*.

La relation (3) peut s'écrire

$$(a^2 - x^2)(a^2 - \xi^2) = (1 - e^2)x^2\xi^2,$$

ce qui montre que si l'un des points parcourt le quart de l'ellipse en allant de l'extrémité du petit axe à celle du grand, l'autre parcourt le même arc en sens inverse.

637. Si l'on désigne par x et ξ les abscisses des points *associés* m et μ, on a les formules (n° 636)

$$(1) \qquad x^2 + \xi^2 = \frac{p^2 + a^2e^2}{e^2}, \quad x^2\xi^2 = \frac{a^2p^2}{e^4},$$

$$(2) \qquad a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + e^2x^2\xi^2 = 0.$$

Soient $s = \mathrm{B}m$ l'arc d'ellipse qui part du sommet B du petit axe et qui aboutit au point variable m; $\sigma = \mathrm{A}\mu$ celui qui part du sommet A du grand axe et qui aboutit au *point associé* μ; l'équation de l'ellipse fournit les deux suivantes :

$$ds = \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx, \quad d\sigma = -\sqrt{\frac{a^2 - e^2\xi^2}{a^2 - \xi^2}}\, d\xi.$$

D'ailleurs, on tire de l'équation (2)

$$x = a\sqrt{\frac{a^2 - \xi^2}{a^2 - e^2\xi^2}}, \quad \xi = a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2x^2}};$$

donc

$$ds = \frac{a\,dx}{\xi}, \quad d\sigma = -\frac{a}{x}\,d\xi,$$

et, par suite,

$$ds - d\sigma = \frac{adx}{\xi} + \frac{ad\xi}{x}.$$

D'un autre côté, les équations (1) donnent par la différentiation

$$\frac{dx}{\xi} + \frac{d\xi}{x} = \frac{pdp}{e^2 x\xi} = \frac{dp}{a};$$

d'où

$$ds - d\sigma = dp.$$

On en conclut

$$(3) \qquad s_1 - s - (\sigma_1 - \sigma) = p_1 - p,$$

où l'on a

$$s_1 = \mathrm{B}m_1 > \mathrm{B}m, \quad \sigma_1 = \mathrm{A}\mu_1 > \mathrm{A}\mu.$$

La relation (3) est précisément celle qu'il fallait démontrer.

Si l'on y fait $x = 0$, elle donne

$$\mathrm{B}m_1 = \mathrm{A}\mu_1;$$

la proposition qu'exprime cette égalité est connue sous le nom de *théorème de Fagnano*.

(Le Besgue.)

638. Soit $\frac{a}{b}$ le rapport donné ; on a

$$\int ds = \frac{a}{b}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right).$$

Différentiant et prenant y pour variable indépendante, il vient

$$\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{b}\, y\, \frac{d^2x}{dy^2}.$$

Faisons $\frac{dx}{dy} = t$ et intégrons, il viendra

$$Cy^{-\frac{a}{b}} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} + t,$$

$$\frac{1}{C} y^{\frac{a}{b}} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} - t,$$

et enfin

$$2Cx + C^h = b\left(\frac{C^2 y^{\frac{b-a}{b}}}{b-a} - \frac{y^{\frac{b+a}{b}}}{b+a}\right).$$

Ce problème, le cas le plus simple des *courbes de poursuite*, revient au suivant : Un point mobile A parcourt une droite PQ avec une vitesse constante a ; il est poursuivi par un autre mobile B animé d'une vitesse b ; on demande la courbe décrite par B en supposant que la position initiale de ce point ne soit pas sur PQ.

639. On trouve

$$dx = dy\left(c^2 y^{-\frac{2}{n}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}},$$

équation toujours intégrable si n est entier. Pour $n = 2$, on a une cycloïde ; pour $n = 1$, un cercle. Lorsqu'on suppose $n = -1$, l'équation devient

$$dx = \frac{dy}{(c^2y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a dy}{(y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c'}{a}} + e^{-\frac{x+c'}{a}}\right) = 0.$$

La courbe est donc une chaînette.

640. Prenons le point A pour pôle ; le rayon de courbure

en un point quelconque a pour expression, au moyen des coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2p^2 - \frac{rp\,dp}{dr}},$$

en posant

$$\frac{dr}{d\theta} = p.$$

La condition du problème revient d'ailleurs à dire que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est à ce rayon vecteur dans un rapport constant. Il en résulte l'équation

$$p^2 - rp\frac{dp}{dr} + a(r^2 + p^2) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{p(r\,dp - p\,dr)}{r^2 + p^2} = \frac{pr^2\,d\frac{p}{r}}{r^2 + p^2} = a\,dr.$$

Elle devient

$$\frac{2u\,du}{1 + u^2} = 2a\frac{dr}{r},$$

en faisant

$$\frac{p}{r} = u;$$

par suite,

$$r^{2a} = b^2(1 + u^2),$$

et enfin

$$d\theta = \frac{b\,dr}{r(r^{2a} - b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette dernière formule s'intègre (n° 398) et donne

$$r^a \cos a(\theta - \omega) = b. \qquad (\text{N° 599.})$$

641. Ce problème se résout simplement en définissant la

courbe, d'après Euler, par une équation entre le rayon de courbure ρ et l'angle φ que fait ce rayon avec une direction constante. Soit donc

$$\rho = F(\varphi)$$

l'équation de la courbe, φ étant l'angle du rayon de courbure avec une droite donnée. Pour fixer les idées, nous supposerons que cette droite est l'axe des x. On voit sans peine qu'on a

$$ds = \rho\, d\varphi,$$

et comme

$$\frac{dy}{dx} = \tang\varphi,$$

$$dx = ds\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \rho \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$dy = \rho \sin\varphi\, d\varphi.$$

Ces deux dernières équations feront connaître x et y en fonction de φ. D'ailleurs, si ρ_1 et φ_1 sont les coordonnées du point de la développée correspondant au point qui a ρ et φ pour coordonnées, on a

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$d\varphi_1 = d\varphi;$$

et comme l'élément de la développée est égal à $d\rho$, on a aussi

$$d\rho = \rho_1 d\varphi_1 = \rho_1 d\varphi.$$

Si la développée est semblable à la courbe, n étant le rapport de similitude,

$$\rho_1 = n\rho,$$

et, par suite,

$$\frac{d\rho}{\rho} = n\, d\varphi, \quad \rho = A e^{n\varphi}.$$

Si l'on porte cette valeur de ρ dans celles de dx et de dy, on obtient les équations intégrales

$$x - a = \frac{A e^{n\varphi}}{1 + n^2}(\sin\varphi + n\cos\varphi),$$

$$y - b = \frac{A e^{n\varphi}}{1 + n^2}(n\sin\varphi - \cos\varphi),$$

en appelant a et b deux constantes arbitraires. Faisons

$$[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}} = r,$$

$$\frac{y-b}{x-a} = \tan\theta, \quad \frac{1}{n} = \tan\omega,$$

il viendra

$$r = \frac{A e^{n\varphi}}{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}} = A \sin\omega\, e^{\frac{\varphi}{\tan\omega}},$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\varphi - \cos\varphi\tan\omega}{\sin\varphi\tan\omega + \cos\varphi} = \tan(\varphi - \omega);$$

et, par conséquent,

$$\theta = \varphi - \omega, \quad r = A\sin\omega\, e^{\frac{\theta+\omega}{\tan\omega}}.$$

Cette dernière équation est celle d'une spirale logarithmique dans laquelle le rayon vecteur fait avec la tangente l'angle ω.

642. On trouve

$$dy = (n^2 K^2 x^{2n-2} - 1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

La cycloïde et la développée de la parabole sont des cas particuliers de la courbe cherchée.

643. Soit en général une courbe HK qui roule sur une droite Ax située dans son plan; pour trouver le lieu décrit par un point O de ce plan invariablement lié à la courbe,

je la suppose rapportée à ce point comme pôle et à la droite quelconque OP comme axe polaire. La droite OP est aussi invariablement attachée à la courbe. Soient r et θ les coordonnées polaires du point M où la courbe touche l'axe des x, la relation qui les lie est exprimée par une équation

$$(1) \qquad F(r, \theta) = 0.$$

x et y étant les coordonnées du point O, on a aussi (n° 240)

$$(2) \qquad \operatorname{tang} OMX = -\frac{dx}{dy} = \frac{rd\theta}{dr},$$

et

$$(3) \qquad OQ = y = r\frac{rd\theta}{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le lieu s'obtient en éliminant θ et r entre les équations (1), (2) et (3).

En appliquant ici ce calcul, il vient

$$dx = \left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Si $m = -1$, la courbe mobile est un cercle dont un point est situé au pôle; on retrouve la cycloïde.

Pour $m = \frac{1}{2}$, la courbe mobile est une parabole qui a son foyer en O; ce foyer décrit une chaînette.

Pour $m = 2$, le point O, centre d'une hyperbole équilatère, décrit une courbe dont l'équation différentielle

$$dx = \frac{y^2 dy}{(a^4 - y^4)^{\frac{1}{2}}}$$

est celle d'une courbe élastique rectangulaire (n°s 557 et 603).

644. Le plan normal au point x, y, z a pour équation

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0,$$

et la distance de l'origine à ce plan est

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{ds}.$$

L'origine étant le centre de la sphère donnée de rayon a, on a donc

$$a\,ds = x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

d'où

$$s = C + \frac{1}{2a}(x^2 + y^2 + z^2). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

645. Cherchons d'abord l'équation de la courbe en supposant, pour plus de généralité, qu'il s'agit d'un cône quelconque du second degré, dont l'équation est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

En un point (x, y, z) situé à une distance r de l'origine, le cosinus de l'angle formé par la génératrice et la tangente sera

$$(2) \qquad \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r\,ds} = m = \frac{dr}{ds},$$

m étant une constante. Les équations (1) et (2) se transforment au moyen des formules connues

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

et deviennent

$$(3) \qquad \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} - \frac{r^2\cos^2\theta}{c^2} = 0,$$

$$(4) \qquad dr^2 = m^2\,ds^2 = m^2(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta)d\varphi^2.$$

L'équation (3) nous donne

$$\sin^2\theta = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + c^2p^2},$$

en posant, pour abréger,

$$(5) \qquad p^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi.$$

On tire de là

$$d\theta = -\frac{abc\,dp}{a^2b^2 + c^2p^2} = \frac{abc\,(b^2 - a^2)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{p\,(a^2b^2 + c^2p^2)}.$$

Substituant les valeurs de $\sin\theta$ et de $d\theta$ dans l'équation (4), elle prend la forme

$$(6) \quad \frac{dr}{r} = \frac{abm}{\sqrt{1 - m^2}}\,d\varphi\,\frac{\sqrt{p^2(a^2b^2 + c^2p^2) + c^2(b^2 - a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}{p\,(a^2b^2 + c^2p^2)},$$

où l'on suppose p remplacée par sa valeur (5).

L'équation (6) s'intègre au moyen des fonctions elliptiques. Lorsque $a = b$, $p = a$, etc., on a

$$\log\frac{r}{r_0} = \pm\frac{ma}{\sqrt{1 - m^2}\,\sqrt{a^2 + c^2}}\,\varphi = \pm k\varphi,$$

ou

$$r = r_0 e^{\pm k\varphi}.$$

L'équation (3) se réduit alors à

$$\text{tang}\,\theta = \frac{a}{c},$$

et la projection de r sur le plan des xy étant égale à $r\sin\theta$, il en résulte que la projection de la courbe sur le même plan est une spirale logarithmique. On voit par l'équation (2) que la courbe cherchée est rectifiable.

646. Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ les coordonnées des extrémités des diamètres par lesquelles on mène

des plans tangents à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ces plans tangents ont pour équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}&=1,\\ \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}&=1,\\ \frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}&=1.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, la ligne qui joint le centre au point (x, y, z) est la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes sont les trois demi-longueurs des diamètres considérés. La projection de cette diagonale sur un axe quelconque étant égale à la somme des projections des trois arêtes sur le même axe, on a

$$x=x_1+x_2+x_3,\quad y=y_1+y_2+y_3,\quad z=z_1+z_2+z_3;$$

et par suite, en ajoutant les équations (1),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3.$$

647. L'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

si on le coupe par le plan représenté par

$$lx+my+nz=0,$$

les demi-axes principaux seront les racines de l'équation

$$\frac{a^2l^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2m^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2n^2}{r^2-c^2}=0.$$

(N° 220.)

D'nn autre côté, x, y, z désignant les coordonnées de A ou de B, on voit sans peine qu'on a

$$x = lr,\quad y = mr,\quad z = nr.$$

L'équation de la surface est donc

$$\frac{a^2x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - c^2} = 0,$$

dans laquelle

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (\text{N}^\circ\ 323.)$$

648. Les deux sphères ont pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = k^2.$$

L'équation d'un plan tangent à la première au point (x_1, y_1, z_1) sera

$$(1) \qquad xx_1 + yy_1 + zz_1 = h^2.$$

Pour exprimer que ce plan est aussi tangent à la seconde au point (x_2, y_2, z_2), on a les relations

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = h^2,$$

$$\frac{x_2 - a}{x_1} = \frac{y_2 - b}{y_1} = \frac{z_2 - c}{z_1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{x_2 - a}{x_1} = \frac{y_2 - b}{y_1} = \frac{z_2 - c}{z_1} = \pm\frac{k}{h} = \frac{h^2 - (ax_1 + by_1 + cz_1)}{h^2};$$

par suite,

$$(2) \qquad ax_1 + by_1 + cz_1 = h(h \pm k).$$

La question revient à trouver la surface enveloppe d'un plan dont l'équation est (1), les paramètres x_1, y_1, z_1 devant satisfaire à l'équation

$$(3) \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = h^2,$$

et à la relation (2).

Différentiant les équations (1), (3), (2) par rapport aux paramètres, il vient

$$(4)\qquad x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 = 0,$$

$$(5)\qquad x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1 + z_1\,dz_1 = 0,$$

$$(6)\qquad a\,dx_1 + b\,dy_1 + c\,dz_1 = 0.$$

Ajoutons entre elles ces dernières équations après avoir multiplié la première par λ et la seconde par μ, λ et μ étant deux indéterminées, puis égalons à zéro les multiplicateurs des différentielles; nous trouverons ainsi

$$\lambda x = \mu x_1 + a,\quad \lambda y = \mu y_1 + b,\quad \lambda z = \mu z_1 + c.$$

Ces relations, multipliées respectivement par x, y, z et ajoutées, donneront

$$\lambda h^2 = \mu h^2 + h(h \pm k).$$

Tirant μ de là, on obtient enfin, eu égard à la symétrie des calculs,

$$\frac{x - x_1}{ha - (h \pm k)x_1} = \frac{y - y_1}{hb - (h \pm k)y_1} = \frac{z - z_1}{hc - (h \pm k)z_1}.$$

Ces trois rapports ont pour valeur commune

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - h^2}{h(ax + by + cz) - (h \pm k)h^2},$$

et aussi

$$\frac{ax + by + cz - h(h \pm k)}{h(a^2 + b^2 + c^2) - h(h \pm k)^2}.$$

Il en résulte l'équation

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2 - h^2)[a^2 + b^2 + c^2 - (h \pm k)^2]\\ = [ax + by + cz - h(h \pm k)]^2\end{aligned}$$

Elle représente deux cônes, comme on pouvait le prévoir.

649. L'équation du plan normal à la courbe au point (x, y, z) est la suivante :

$$(1)\quad a^2(b^2-c^2)\frac{X}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{Y}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{Z}{z}=0,$$

x, y et z étant liées par les deux relations

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$(3)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Différentiant ces trois équations par rapport à x, y et z, nous aurons

$$(4)\quad a^2(b^2-c^2)\frac{X}{x^2}dx+b^2(c^2-a^2)\frac{Y}{y^2}dy+c^2(a^2-b^2)\frac{Z}{z^2}dz=0,$$

$$(5)\quad x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

$$(6)\quad \frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0.$$

En faisant usage des indéterminées λ et μ comme dans le numéro précédent, on trouve

$$a^2(b^2-c^2)\frac{X}{x^2}+\lambda x+\mu\frac{x}{a^2}=0,$$

$$b^2(c^2-a^2)\frac{Y}{y^2}+\lambda y+\mu\frac{y}{a^2}=0,$$

$$c^2(a^2-b^2)\frac{Z}{z^2}+\lambda z+\mu\frac{z}{a^2}=0.$$

Multiplions respectivement par x, y, z ces dernières équations, et ajoutons les résultats, il vient

$$\lambda r^2+\mu=0;$$

et, par suite,

$$x^3=\frac{a^4}{\lambda}\frac{b^2-c^2}{r^2-a^2}X,\quad y^3=\frac{b^4}{\lambda}\frac{c^2-a^2}{r^2-b^2}Y,\quad z^3=\frac{c^4}{\lambda}\frac{a^2-b^2}{r^2-c^2}Z.$$

D'ailleurs, de la combinaison des équations (2) et (3) on déduit

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0;$$

et en substituant à x, y, z leurs valeurs tirées des équations précédentes, on arrive à un résultat de la forme

$$\left(\frac{X}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{Y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{Z}{C}\right)^{\frac{2}{3}}=0.$$

Cette équation homogène par rapport aux variables représente une surface conique, résultat facile à prévoir puisque tous les plans normaux passent par le centre de la sphère.

650. Prenons le point fixe pour origine des coordonnées, et soient

$$f(x, y, z)=0, \quad F(x, y, z)=0$$

les équations des deux surfaces. a, b, c, étant les coordonnées du point M, a', b', c' celles du point M', on a

(1) $$f(a, b, c)=0,$$
(2) $$F(a', b', c')=0.$$

D'ailleurs,

$$\cos \mathrm{MOH}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}=\frac{aa'+bb'+cc'}{\mathrm{OM}.\mathrm{OM}'},$$

et, par suite,

(3) $$aa'+bb'+cc'=k^2.$$

On trouve aussi

$$\mathrm{OH}'=\frac{a'\frac{dF}{da'}+b'\frac{dF}{db'}+c'\frac{dF}{dc'}}{\left[\left(\frac{dF}{da'}\right)^2+\left(\frac{dF}{db'}\right)^2+\left(\frac{dF}{dc'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, si l'on considère a, b, c, a', b', c' comme variables dans les équations (1), (2), (3), il vient, en différentiant,

$$\frac{df}{da}da + \frac{df}{db}db + \frac{df}{dc}dc = 0,$$

$$\frac{dF}{da'}da' + \frac{dF}{db'}db' + \frac{dF}{dc'}dc' = 0,$$

$$a'da + b'db + c'dc + ada' + bdb' + cdc' = 0.$$

Employons ici, comme dans le numéro qui précède, les multiplicateurs indéterminés λ et μ, il viendra

$$a' = \lambda\frac{df}{da},\quad b' = \lambda\frac{df}{db},\quad c' = \lambda\frac{df}{dc},$$

$$a = \mu\frac{dF}{da'},\quad b = \mu\frac{dF}{db'},\quad c = \mu\frac{dF}{dc'}.$$

Les trois dernières équations font voir que les directions de OM et de OH' coïncident. Elles permettent de mettre OH' sous la forme

$$OH' = \frac{K^2}{OM},\quad \text{d'où}\quad OM.OH' = k^2. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Les surfaces qu'on vient de considérer ont été nommées *réciproques* par M. Mac Cullagh.

Il est facile de voir que la surface réciproque d'un ellipsoïde est un autre ellipsoïde.

651. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point M de la surface P_1; l'équation d'un plan tangent à la surface P au point (x', y', z') et passant en M sera

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

avec les conditions

$$\frac{x'x_1}{a^2} + \frac{y'y_1}{b^2} + \frac{z'z_1}{c^2} = 1,\quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Le cône qui a son sommet en M peut être considéré comme la surface enveloppe de ce plan.

Pour obtenir l'équation de cette surface, différentions les trois équations précédentes par rapport à x', y', z'; nous en déduirons

(1) $$x = \lambda x' + \mu x_1,$$

(2) $$y = \lambda y' + \mu y_1,$$

(3) $$z = \lambda z' + \mu z_1,$$

λ et μ étant deux facteurs indéterminés.

Multipliant (1) par $\frac{x'}{a^2}$, (2) par $\frac{y'}{b^2}$, (3) par $\frac{z'}{c^2}$ et ajoutant, on trouve

(4) $$1 = \lambda + \mu.$$

Multipliant de nouveau (1) par $\frac{x}{a^2}$, (2) par $\frac{y}{b^2}$, (3) par $\frac{z}{c^2}$ et ajoutant, il vient

(5) $$A + 1 = \lambda + \mu(B + 1), \quad \text{ou} \quad A = \mu B,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = A, \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = B.$$

Multipliant enfin (1) par $\frac{x_1}{a^2}$, (2) par $\frac{y_1}{b^2}$, (3) par $\frac{z_1}{c^2}$ et faisant

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = A_1,$$

nous obtiendrons

(6) $$B + 1 = \lambda + \mu(A_1 + 1), \quad \text{ou} \quad B = \mu A_1;$$

par suite,

$$AA_1 = B^2,$$

c'est-à-dire

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right) \\ &\quad =\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1\right)^2; \end{aligned} \right.$$

c'est l'équation du cône dont le sommet est en M.

Pour tout autre cône dont le sommet est sur la surface P_1, la quantité

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1$$

aura la même valeur, puisque P et P_1 sont concentriques, semblables et semblablement placés. Si donc on retranche l'équation (7) de l'équation du cône dont le sommet serait au point x_2, y_2, z_2, ce point étant sur P_1, on trouvera

$$\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Cette équation, à laquelle satisfont les coordonnées des points communs aux deux cônes, se décompose en deux équations du premier degré. C. Q. F. D.

Les plans qu'on obtient ainsi ont pour équations

$$x\frac{x_1-x_2}{a^2}+y\frac{y_1-y_2}{b^2}+z\frac{z_1-z_2}{c^2}=0,$$

$$x\frac{x+x_2}{a^2}+y\frac{y_1+y_2}{b^2}+z\frac{z_1+z_2}{c^2}=0.$$

La conditiou pour qu'ils se coupent à angle droit donnerait

$$\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}=\frac{x_2^2}{a^4}+\frac{y_2^2}{b^4}+\frac{z_2^2}{c^4};$$

c'est-à-dire que les divers sommets doivent se trouver sur un troisième ellipsoïde, concentrique aux deux autres, sem-

blablement placé, et dont les axes soient proportionnels aux carrés des axes de ceux-là.

652. Soit M (x, y, z) un point de la surface de séparation S dont l'équation est

$$\varphi(x, y, z) = 0;$$

les cosinus directeurs de la normale MN en ce point sont donnés par les formules

$$l = V\frac{d\varphi}{dx}, \quad m = V\frac{d\varphi}{dy}, \quad n = V\frac{d\varphi}{dz},$$

où

$$V^2 = \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}.$$

Soient en outre α, β, γ les cosinus directeurs du rayon incident qui aboutit en M, et qui rencontre en un point μ (ξ, η, ζ) la surface Σ à laquelle tous les rayons incidents sont perpendiculaires. Posant

$$\mu M = h,$$

on a

$$(1) \qquad \xi - x = \alpha h, \quad \eta - y = \beta h, \quad \zeta - z = \gamma h.$$

Si α_1, β_1, γ_1 sont les cosinus directeurs du rayon réfracté qui passe en M; ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'un point μ_1 pris sur ce rayon à une distance de M égale à h_1, on a aussi

$$(2) \qquad \xi_1 - x = \alpha_1 h_1, \quad \eta_1 - y = \beta_1 h_1, \quad \zeta_1 - z = \gamma_1 h_1,$$

et il s'agit de prouver qu'on peut déterminer h_1 de telle sorte que les rayons réfractés soient normaux au lieu des points μ_1. Or, en différentiant les équations (1), on en tire

$$d\xi = dx + \alpha dh + h d\alpha, \quad d\eta = dy + \beta dh + h d\beta,$$
$$d\zeta = dz + \gamma dh + h d\gamma,$$

et par suite,

$$\alpha d\xi + \mathit{6} d\eta + \gamma d\zeta = \alpha dx + \mathit{6} dy + \gamma dz + dh = 0,$$

puisque la droite μM est normale à la surface Σ. Les équations (2) donnent de même

$$(3)\quad \alpha_1 d\xi_1 + \mathit{6}_1 d\eta_1 + \gamma_1 d\zeta_1 = \alpha_1 dx + \mathit{6}_1 dy + \gamma_1 dz + dh_1.$$

D'un autre côté, la première loi de la réfraction exige que le plan qui renferme le rayon incident et le rayon réfracté contienne la normale en M. On exprime ce fait en écrivant que l'*axe* du plan μMN est parallèle à celui du plan μ_1MN; c'est-à-dire qu'on a, i désignant l'angle d'incidence, r celui de réfraction,

$$\frac{\mathit{6} n - \gamma m}{\sin i} = \frac{\mathit{6}_1 n - \gamma_1 m}{\sin r}, \quad \frac{\gamma l - \alpha n}{\sin i} = \frac{\gamma_1 l - \alpha_1 n}{\sin r},$$
$$\frac{\alpha m - \mathit{6} l}{\sin i} = \frac{\alpha_1 m - \mathit{6}_1 l}{\sin r},$$

d'où

$$(4)\quad \frac{l}{\alpha - \alpha_1 k} = \frac{m}{\mathit{6} - \mathit{6}_1 k} = \frac{n}{\gamma - \gamma_1 k};$$

k est ici l'indice de réfraction.

Comme on a

$$l dx + m dy + n dz = 0,$$

on tire des équations (4)

$$\alpha dx + \mathit{6} dy + \gamma dz = k(\alpha_1 dx + \mathit{6}_1 dy + \gamma_1 dz) = -dh,$$

ce qui transforme la relation (3) en la suivante,

$$\alpha_1 d\xi_1 + \mathit{6}_1 d\eta_1 + \gamma_1 d\zeta_1 = -\frac{dh}{k} + dh_1.$$

Il suffit donc qu'on ait $dh_1 = \frac{dh}{k}$ pour que les rayons réfractés soient normaux à la surface des points μ_1, et par suite à toutes les surfaces *parallèles*.

Ce théorème remarquable a été trouvé par Malus, dans le cas particulier où les rayons incidents émanent d'un même point. M. Dupin l'a démontré généralement.

653. Prenant le point donné pour origine et la ligne donnée pour axe des x, l'équation de l'une des sphères sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax.$$

Si l'on désigne en outre par $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ les dérivées partielles relatives à la surface inconnue, on est conduit à intégrer l'équation

$$\frac{dz}{dx}\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2xz} - \frac{y}{z}\frac{dz}{dy} + 1 = 0.$$

On trouve

$$x^2 + y^2 + z^2 = z\varphi\left(\frac{y}{z}\right).$$

654. $\varphi\left(\frac{x^{a^2}}{z^{c^2}}, \frac{y^{b^2}}{z^{c^2}}\right) = 0.$

655. On trouve tout de suite, en prenant A pour origine et AB pour axe des z,

$$z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = a(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale de cette équation aux différentielles partielles est la suivante :

$$x^{a-1}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + z\right] = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

656. $x + z\frac{dz}{dx} = mx, \quad y + z\frac{dz}{dy} = ny.$

On déduit de là

$$dz = \frac{(m-1)x\,dx}{z} + \frac{(n-1)y\,dy}{z},$$

et en intégrant,

$$z^2 = (m-1)x^2 + (n-1)y^2 + C.$$

657. L'équation qui donne, en général, les rayons de courbure principaux d'une surface est, en adoptant les notations connues,

$$\rho^2(rt-s^2) - \rho(1+p^2+q^2)[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r] + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Il en résulte qu'on a, pour la question présente,

$$(1)\qquad (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0,$$

et

$$(2)\qquad z = \varphi(x^2+y^2),$$

l'axe des z étant pris comme axe de révolution. Si, pour abréger, on représente x^2+y^2 par α, et qu'on tire de l'équation (2) les valeurs de p, q, r, s et t pour les porter dans l'équation (1), on trouve

$$\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{d\varphi}{d\alpha} + 2\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^3 = 0.$$

En intégrant une première fois, il vient

$$\frac{d\varphi^2}{d\alpha^2} = \frac{1}{\alpha(C\alpha - 4)},$$

ou, en posant $\alpha = u^2$, $\frac{4}{C} = a^2$,

$$\frac{d\varphi^2}{du^2} = \frac{a^2}{u^2-a^2}.$$

On déduit de là

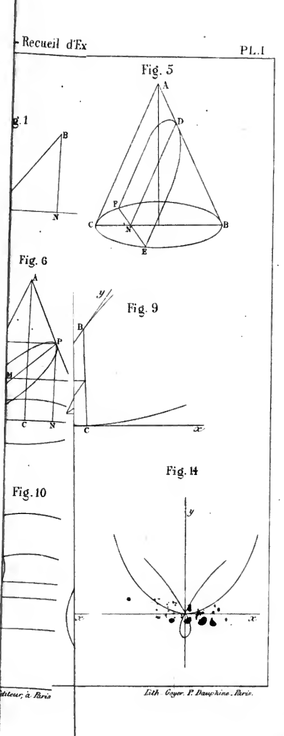
$$u = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z+C'}{a}} + e^{-\frac{z+C'}{a}}\right),$$

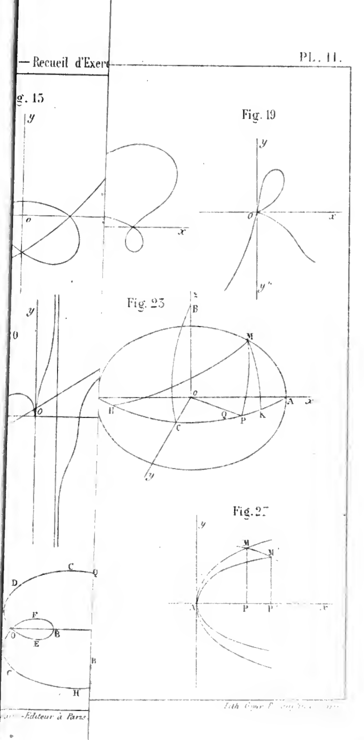
ce qui démontre que la courbe génératrice de la surface est une chaînette.

Ce problème est un cas particulier de celui où l'on demande la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, surface qui jouit aussi de la propriété de circonscrire un volume donné sous une aire minimum. M. Delaunay a donné une élégante solution du cas général en prouvant que la courbe méridienne de la surface est celle qu'engendre le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole roulant sur l'axe des z. Quand la courbure moyenne est nulle, la courbe roulante est une parabole. (*Journal de Liouville*, t. VI.)



FIN.


Fig. 5
A
D
P
C
N
B
E
g. 1
B
N
Fig. 6
A
P
M
C
N
Fig. 9
y
B
C
x
Fig. 10
Fig. 14
y
x
x



Éditeur à Paris
Lith. ...







